

# PROJEKTOWANIE WALCOWYCH PRZEKŁADNI ZĘBATYCH O ZMIENIAJĄCYM SIĘ PRZEŁOŻENIU

Igor ZARĘBSKI<sup>1</sup>  
Tadeusz SAŁACIŃSKI<sup>2</sup>

## STRESZCZENIE

*W artykule przedstawiono metodykę projektowania przekładni walcowych o zmieniającym się przełożeniu z uwzględnieniem uzębień zewnętrznych i wewnętrznych o prostej lub skośnej linii zęba. Uwzględniono aspekty technologiczne, które determinują algorytm obliczeń zarysów zębów. Wyniki niniejszego opracowania mogą stanowić podstawę do dalszego badania różnych konkretnych własności przekładni zębatych o zmieniającym się przełożeniu, analogicznie do prowadzonych badań przekładni zębatych walcowych i stożkowych. Przykładami mogą tu być zagadnienia związane z kinematyką i zastosowaniem przekładni specjalnego przeznaczenia, jak również zagadnienia wytrzymałościowe, dynamiczne, trybologiczne i inne.*

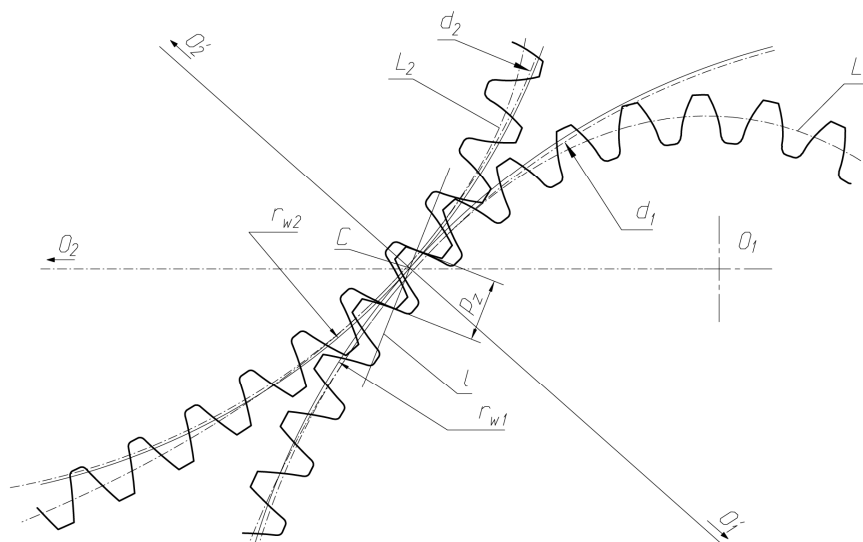
## 1. WSTĘP

Idea przekładni o zmieniającym się przełożeniu znana jest od dawna, jednak dopiero zastosowanie nowoczesnych technik komputerowych umożliwiło ich projektowanie i wytwarzanie z odpowiednio wysoką dokładnością. Ze względu na swoje liczne zalety największe zastosowanie w przemyśle zyskały przekładnie zębate wykorzystujące krzywe ewolwentowe [8]. Takie też rozwiązanie zostało zaadoptowane dla przypadku kół zębatych nieokrągłych.

---

<sup>1</sup> mgr inż. Igor Zarębski – PROZAMET

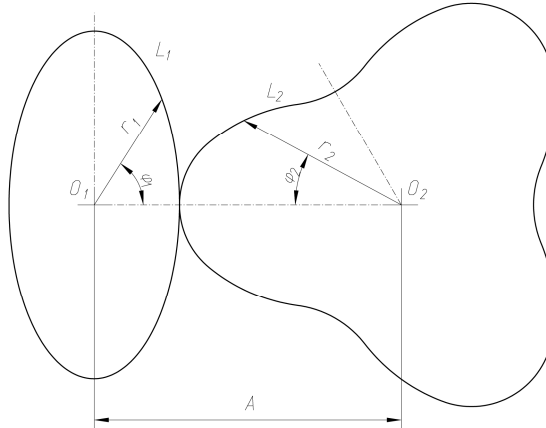
<sup>2</sup> dr hab. inż. Tadeusz Sałaciński – Politechnika Warszawska



Rys. 1. Geometria zazębienia nieokrągłego

Rys.1 przedstawia zazębiające się zarysy nieokrągłe. Odległość osi kół została zwiększona i pojawił się luz międzyzębny. Krzywe podziałowe  $L_1$  i  $L_2$ , są odpowiednikami kół podziałowych w kołach okrągłych. Chwilowa linia przyporu  $l$  przecina miejsca styku zębów prostopadle do ich zarysów w tym punkcie. Prostopadle do krzywych  $L_1$  i  $L_2$  w miejscu, gdzie ich odległość jest najmniejsza, przechodzi prosta, na której leżą środki  $O'_1, O'_2$  zastępczych okręgów podziałowych  $d_1$  i  $d_2$ , oraz okręgów tocnych o promieniach  $r_{w1}$  i  $r_{w2}$ . Krzywizny zastępczych okręgów podziałowych odpowiadają krzywiznom odpowiednich linii  $L_1$  i  $L_2$  w miejscu ich przecięć przez prostą  $O'_1O'_2$ , zaś koła toczone stykają się w chwilowym biegunie zazębienia  $C$  na przecięciu prostych  $O'_1O'_2$  i  $l$ .

W przypadku przekładni zębatach o zmieniającym się przełożeniu zarys każdego zęba może mieć inny kształt, zaś linie podziałowe wyobrażają przekładnię w postaci dwóch rolek, toczących się po sobie bez poślizgu. Linie te są także podzielone na  $z$  fragmentów o długości równej podziałce koła  $p$ , gdzie  $z$  jest liczbą zębów koła.



Rys. 2. Linie podziałowe przekładni zębatej o zmieniającym się przełożeniu

## 2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI GEOMETRYCZNE

Projektowana przekładnia przedstawiona jest jako zarysy  $L_1$  i  $L_2$  dwóch rolek ze środkami obrotu odpowiednio w punktach  $O_1$  i  $O_2$ , które współpracują ze sobą tocząc się po sobie bez poślizgu (rys.2).

Zarys  $L_1$  określony jest we współrzędnych biegunowych przez wartość promienia  $r_1(\varphi_1)$ . Przełożenie takiej przekładni jest określone funkcją:

$$v(\varphi_1) = \frac{\omega_1(\varphi_1)}{\omega_2(\varphi_1)} = \frac{r_2(\varphi_1)}{r_1(\varphi_1)} \quad (1)$$

gdzie  $\omega_1(\varphi_1)$  i  $\omega_2(\varphi_1)$  to funkcje prędkości kątowych odpowiednio koła 1 i 2. Odległość osi linii podziałowych  $A$  jest stała:

$$A = r_1(\varphi_1) + r_2(\varphi_1) = \text{const} \quad (2)$$

Ponieważ linie podziałowe mają toczyć się po sobie bez poślizgu, to:

$$d\varphi_2 = \frac{r_1(\varphi_1)}{r_2(\varphi_1)} d\varphi_1 \quad (3)$$

Uwzględniając (1), (2) i (3), po scałkowaniu otrzymuje się:

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{r_1(\varphi_1)}{A - r_1(\varphi_1)} d\varphi_1 \quad (4)$$

Stałą całkowania określa się z warunku, że jeżeli  $\varphi_1=0$ , to  $\varphi_2=0$ .

Przykładowo w przypadku przedstawionym na rys. 2 okres  $T$  funkcji przełożenia  $v(\varphi_1)$  jest równy  $\pi$ ,  $T_1=2\pi$ , a  $T_2=3\pi$ , więc gdy  $\varphi_1=\pi$  to  $\varphi_2=2/3\pi$ . Stąd:

$$\frac{2}{3}\pi = \int_0^{\pi} \frac{r_1(\varphi_1)}{A - r_1(\varphi_1)} d\varphi_1 \quad (5)$$

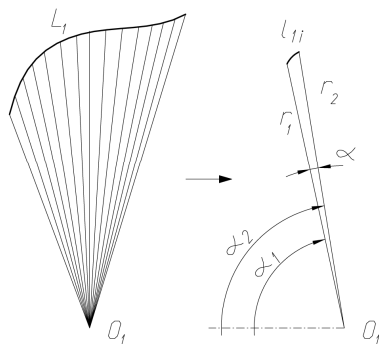
Z równania (4) znajduje się odległość osi  $A$ . Krzywą  $L_2=r_2(\varphi_1)$  wyznacza się z (2) i (3).

W celu wyznaczenia prawidłowo współpracujących linii podziałowych o dowolnym kształcie wykorzystany zostanie podział takiej linii na segmenty, będące fragmentami spirali Archimedesesa. Własnością tej krzywej jest liniowa zależność odległości punktu na krzywej od środka obrotu w zależności od kąta obrotu. Taka liniowa zmiana długości promienia wodzącego w zależności od kąta obrotu sprawia, że spirala Archimedesesa nadaje się dobrze do opisywania segmentów kół nieokrągłych. Oczywiście zastosowanie innych krzywych jest również możliwe. Równanie ogólne spirali Archimedesesa:

$$r = k\alpha \quad (6)$$

gdzie  $k$  jest parametrem spirali.

Zakładamy, że dana jest linia podziałowa  $L_1$  (rys. 3) lub dana jest funkcja zmienności przełożenia, z której wyznaczamy  $L_1$  z zależności (1). Dla linii  $L_1$  szukamy współpracującej linii tocznej  $L_2$ . Linia  $L_1$  została podzielona na  $i$  małych części  $l_{1i}$  tak, aby każda z tych części dała się z wystarczającą dokładnością przedstawić za pomocą spirali Archimedesesa.

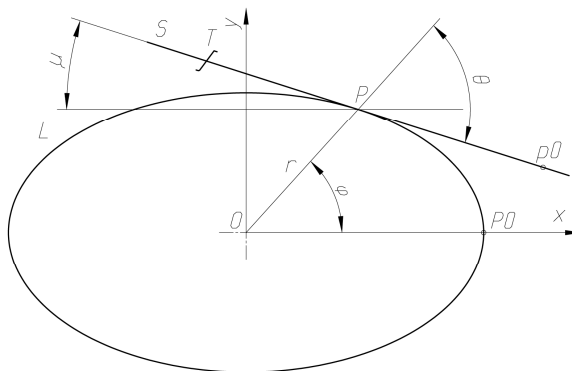


Rys. 3. Podział linii podziałowej na części;  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są parametrami związanymi z aktualnie analizowanym segmentem  $l_{1i}$  linii  $L_1$  i oznaczają:  $r_1$  – początkowy promień fragmentu spirali,  $r_2$  – końcowy promień fragmentu spirali,  $\alpha$  – kąt fragmentu spirali,  $\alpha_1$  – kąt początkowy fragmentu spirali,  $\alpha_2$  – kąt końcowy fragmentu spirali

Posługując się rys. 3 można wyprowadzić zależność określającą  $l_{ij}$ :

Uwzględniając, że linie  $L_1$  i  $L_2$  toczą się po sobie bez poślizgu, a linia  $L_2$  została odpowiednio do  $L_1$  podzielona na  $i$  części  $l_{2i}$ , to  $|l_{1i}| = |l_{2i}|$ . Zbiór segmentów  $l_{2i}$  składa się na linię  $L_2$ .

W celu zapewnienia wymaganych warunków zążeń zarysy zębów koła zębatego muszą współpracować poprawnie z zarysem odniesienia opartym na zębatce prostoliniowej (rys. 4). Odpowiada to sytuacji, w której linia podziałowa zarysu odniesienia odtacza się po linii podziałowej koła zębatego bez poślizgu, natomiast chwilowe położenia związanego z linią podziałową zarysu odniesienia generują zarysy zębów koła zębatego.



Linia podziałowa koła nieokrągłego  $L$  określona jest zależnością  $L=r(\varphi)$ . Po linii podziałowej koła toczy się bez poślizgu linia zarysu odniesienia  $S$ , z którą związany jest zarys odniesienia  $T$ . Współrzędne prostokątne punktu styku obu linii tocących  $P$  to:

$$P[x, y] = [r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi)] \quad (8)$$

Kąt pomiędzy promieniem  $r(\varphi)$  a linią podziałową zarysu odniesienia  $S$  określa zależność:

$$\theta = \arctan \left( \frac{r(\varphi)}{\frac{dr}{d\varphi}} \right) \quad (9)$$

Więc:

$$\mu = \varphi - \theta \quad (10)$$

Dla  $\varphi=0$   $P0=p0$ . Ponieważ prosta  $S$  toczy się po linii  $L$  bez poślizgu od punktu  $P0$  do punktu  $P$ , to długość fragmentu  $l$  linii  $L$  pomiędzy punktami  $P0$  i  $P$  równa się długości odcinka  $s$  między punktami  $p0$  i  $P$  na prostej  $S$ .

Jeżeli linia  $L$  składa się z  $i$  części  $l_i$  zgodnie z powyżej podanymi wytycznymi, rozpatrywany punkt  $P$  odpowiada  $l_j$ , długości krzywych  $l_i$  i współczynniki  $k_i$  zostały wyznaczone ze wzoru (7), to:

$$|s| = \sum_{n=1}^i l_n \quad (11)$$

Linia podziałowa  $L$  podzielona jest na  $z$  segmentów, z których każdy ma długość równą długości podziałki  $p$ . Moduł  $m$  jest określony następującą zależnością:

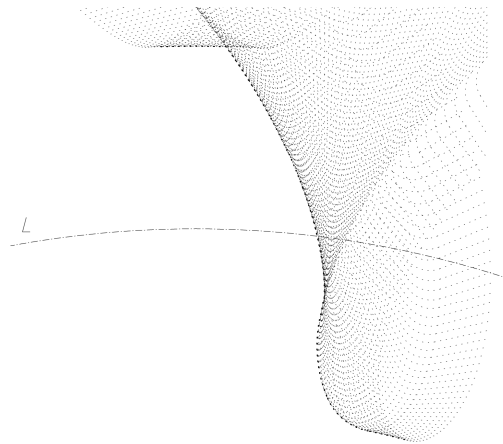
$$m = \frac{|L|}{\pi z} = \frac{\sum_{n=1}^i l_n}{\pi z} \quad (12)$$

gdzie  $z$  jest liczbą zębów koła zębatego.

#### 4. METODA KONTEKSTOWA

W celu wyznaczenia zarysów zębów posłużono się tzw. metodą kontekstową bliżej opisaną w [12]. Metoda ta polega na badaniu kolejno poszczególnych stanów rozpatrywanego układu i uzyskaniu tą drogą pewnego kontekstu, z którego następnie wybierane są i przetwarzane na wyniki dane spełniające określone kryteria. Kontekst tworzony jest przez położenia punktów leżących na zarysie odniesienia w kolejnych pozycjach przyjmowanych przez

zarys odniesienia w czasie toczenia się po linii podziałowej koła zębatego (rys.5).

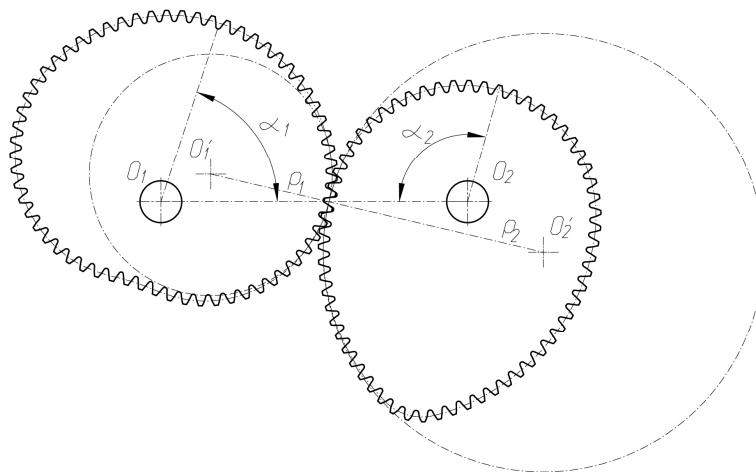


Rys. 5. Zarys zęba wyznaczony przy użyciu metody kontekstowej

Cenną zaletą metody kontekstowej jest łatwość zastosowania wszelkich modyfikacji zarysu odniesienia. Potrzeba stosowania takich modyfikacji, analogicznie jak w klasycznych kołach zębatych, wynika najczęściej z warunków poprawnego zazębienia i optymalizacji współpracy. Jako przykład można tu podać przesuwanie zarysu w celu uniknięcia interferencji zarysów w przypadku zazębienia wewnętrznego, stosowanie beczkowatości boków zębów w celu kompensacji uginania się zębów wchodzących w zazębienie, czy stosowanie korekcji w celu poprawienia warunków poślizgu i toczenia się zarysów dwóch kół zębatych po sobie. Zakres takich modyfikacji może być bardzo szeroki, a ich charakter indywidualny dla każdego zęba, ponieważ w przekładniach zębatych o zmieniającym się przełożeniu dany ząb współpracuje zwykle z jednym i tym samym wrębem.

## 5. PRZEKŁADNIA ZASTĘPCZA

Zazębienie przekładni zębatej o zmieniającym się przełożeniu, ukształtowanej zgodnie z przytoczonym opisem, znajdującej się w określonym przełożeniu, można przedstawić jako zazębienie dwóch kół zębatych okrągłych, a parametry zazębienia takiego zastępczego układu reprezentują chwilowe parametry zazębienia przekładni nieokrągłej. Zmiana położenia kół przekładni powoduje zwykle zmianę wartości parametrów, więc w celu przeanalizowania parametru zazębienia w całym zakresie należy zbadać wartość tego parametru dla pewnej liczby położeń.



Rys. 6. Przekładnia zastępcza

Rys. 6 przedstawia przekładnię zębatą o zmieniającym się przełożeniu w położeniu kątowym, określonym przez kąty obrotu kół zębatych  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , oraz zastępczą przekładnię zębatą, składającą się z dwóch kół zębatych okrągłych o środkach  $O'_1$  i  $O'_2$ , o promieniach kół podziałowych odpowiednio  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . Promienie te są równe krzywiznom linii podziałowych kół nieokrągłych w punkcie styku i wyznacza się je z następującej zależności:

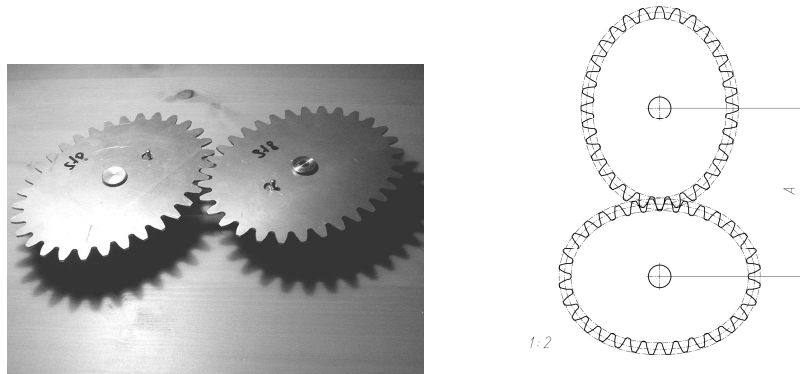
$$\rho = \frac{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

przy założeniu, że zarys linii podziałowej określony jest we współrzędnych biegunowych przez wartość promienia  $r(\varphi)$ .

## 6. WERYFIKACJA OPRACOWANEJ METODYKI PROJEKTOWANIA PRZEKŁADNI O ZMIENIAJĄCYM SIĘ PRZEŁOŻENIU

Weryfikacja opracowanej metodyki projektowania przekładni o zmieniającym się przełożeniu polegała na zaprojektowaniu, fizycznym wykonaniu i sprawdzeniu kilku takich przekładni.





Rys. 7. Przekładnia o kołach w kształcie elipsy

Jedną z nich była przekładnia składająca się z kół zębatach w kształcie elips (rys. 7). Następnie, korzystając z faktu, że w przypadku dwóch kół zębatach o jednakowej liczbie zębów zazębienie odbywa się zawsze pomiędzy tymi samymi zębami, skonstruowano zarysy nieokrągłe charakteryzujące się coraz to inną korekcją zarysu dla każdego kolejnego zęba.

## 7. WNIOSKI

- zastosowanie opracowanej metodyki projektowania przekładni zębatach o zmieniającym się przełożeniu pozwala na swobodne kształtowanie i korygowanie parametrów przekładni
- prawidłowość opracowanej metodyki projektowania przekładni zębatach o zmieniającym się przełożeniu została potwierdzona w praktyce przez sprawdzenie zgodności projektowanej i otrzymanej charakterystyki przełożenia przekładni oraz przez obserwacje pracy uzębień
- opracowane informacje mogą stanowić podstawę do dalszego badania różnych konkretnych własności przekładni zębatach o zmieniającym się przełożeniu, analogicznie do prowadzonych badań przekładni zębatach walcowych i stożkowych. Przykładami mogą tu być zagadnienia związane z kinematyką i zastosowaniem przekładni specjalnego przeznaczenia, jak również zagadnienia wytrzymałościowe, dynamiczne, trybologiczne i inne.

## LITERATURA

- [1] Barkah D., Shafiq B., Dooner D.: 3D Mesh Generation for Static Stress Determination in Spiral Noncircular Gears Used for Torque Balancing, *Journal of Mechanical Design*, June 2002
- [2] Doege E., Hindersmann M.: Optimized kinematics of mechanical presses with non-circular gears, *CIRP STC F*, 46/1/1997
- [3] Doege E., Meinen J., Neumaier T., Schaprian M.: Numerical design of a new forging press drive incorporating non-circular gears, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, Volume 215, Number 4 / 2001
- [4] Kowalczyk L. Urbanek S.: The geometry and kinematics of a toothed gear of variable motion, *Fibres & Textiles in Eastern Europe*, July/September 2003, vol. 11, no 3(42)
- [5] Laczik B.: Involute Profile of Non-Circular Gears, *Materiały Institute of Mechanical Engineering, College of Dunaujváros* Volume 126, Issue 4, pp. 711-720
- [6] Litvin F.: *Gear geometry and applied theory*, Prentice Hall, London, 1994
- [7] Mundo D., Danieli G.: Use of Non-Circular Gears in Pressing Machine Driving Systems, *Materiały Mechanical Department University of Calabria*
- [8] Ochęduszek K.: *Koła zębate, tom I. Konstrukcja*, WNT, Warszawa, 1985
- [9] *Praca zbiorowa: Poradnik mechanika, Tom II*, WNT, Warszawa, 1985
- [10] Schmidt M.: United States Patent 6,672,363, January 6, 2004
- [11] Smith W. C.: *The Math of Noncircular Gearing*, *Gear Technology*, July/August, 2000
- [12] Zarębski I., Sałaciński T.: Designing and WEDM manufacturing of non-circular gears. *Zbiór referatów na międzynarodową konf. nauk.-tech. APE 2007*, Warszawa, 2007
- [13] Zawadzki T., Mostowik J.: *Urządzenie do nacinania zębów w nieokrągłych kołach zębatych*, *Biuletyny Urzędu Patentowego*, 19/1990

## DESIGNING OF NON-CIRCULAR GEARS

### SUMMARY

*In this paper methods for designing of non-circular gears are presented, including internal and external gears with spur or helical teeth. Technology related issues that determine tooth profile calculation algorithm are described. The results presented in this paper can become groundwork for further investigations of other particular properties of non-circular gears, similar to investigations of spur, helical and bevel gears. Examples of such properties include kinematics and application of special purpose gears or issues related to strength, dynamics, tribology and others.*