

# KSZTAŁTOWANIE WYBRANYCH PARAMETRÓW WALCOWYCH UZĘBIENÍ EWOLWENTOWYCH NA PRZYKŁADZIE ZMIANY KĄTA POCHYLENIA LINII ZĘBÓW

Sławomir HERMA<sup>1</sup>

## STRESZCZENIE

*Podstawowym celem artykułu jest zwrócenie uwagi na rolę jaką odgrywa poprawnie dobrana wartość kąta pochylenia linii śrubowej zęba w kontekście geometrii zazębienia, wytrzymałości oraz uwarunkowań technologicznych. W artykule zanalizowano oddziaływania, obserwowane w układzie pracy pary zębatej podczas symulowanego doboru wartości kąta  $\beta_2$ . Podano charakterystykę podstawowych kryteriów, determinujących poprawność zazębienia w sensie geometrycznym oraz technologicznym.*

## 1. WPROWADZENIE

Zdecydowana większość polskojęzycznych pozycji literaturowych określa kąt pochylenia linii śrubowej zęba jako jeden z podstawowych parametrów geometrycznych, określanych na samym początku toku projektowania przekładni zębatej, który obok wartości modułu, liczby zębów oraz kąta przyporu, należy do zbioru elementarnych danych wejściowych. Wytyczne doboru wielkości tego parametru są w wielu podręcznikach traktowane marginalnie, jedynie w nielicznych, zagadnienie to jest szerzej poruszane [2,3,6]. Choć wartość kąta  $\beta_2$  stanowi determinant prawie wszystkich wielkości określających kształt zęba, warunki zazębienia, proces wytwarzania oraz parametry eksploatacyjne

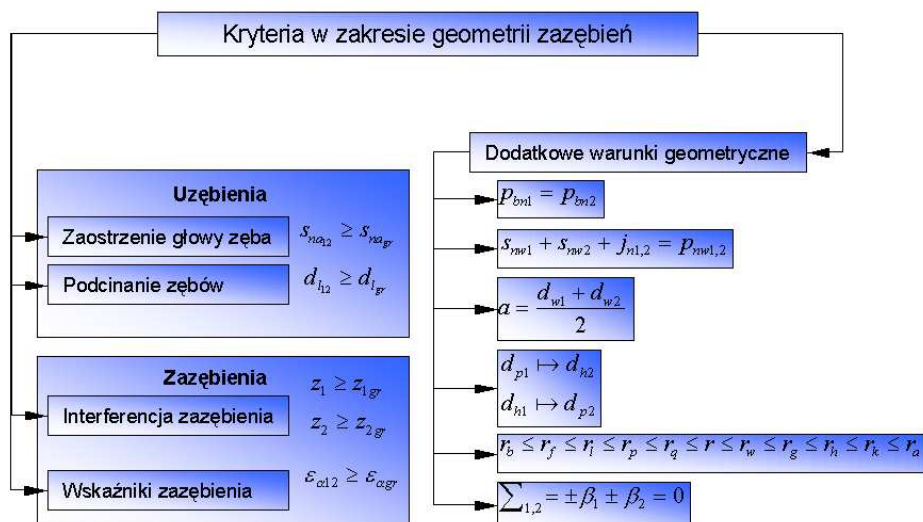
---

<sup>1</sup> dr inż. Sławomir Herma – Akademia Techniczno-Humanistyczna, Katedra Inżynierii Produkcji

przekładni, to dotychczasowe pozycje literaturowe wspominają jedynie, że konstruktor dobierając wartość tego kąta kierować się powinien wyłącznie zapewnieniem zgodnej z normą wartości wskaźnika zazębienia. Podejście takie wydaje się być nie wystarczające, stąd konieczność szerszego zbadania możliwych oddziaływań wielkości  $\beta_2$  w aspekcie geometrii, wytrzymałości i eksploatacji przekładni zębatach, przy wykorzystaniu techniki komputerowej, stanowi punkt wyjścia dla niniejszej publikacji.

## **2. KRYTERIA POPRAWNOŚCI ZAZĘBIENIA W KONTEKŚCIE KĄTA POCHYLENIA LINII ŚRUBOWEJ**

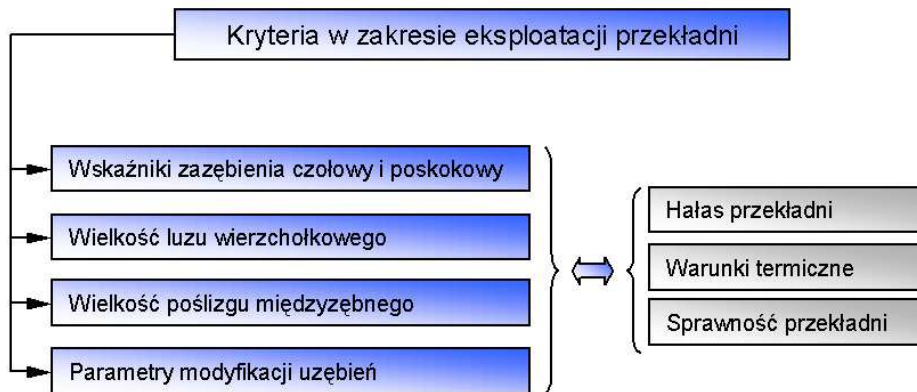
Wśród wielu kryteriów poprawności zazębienia wyróżnić można cztery zasadnicze grupy, związane z geometrią, wytrzymałością, eksploatacją oraz technologią wytwarzania. Ogólną charakterystykę trzech pierwszych grup przedstawiono na rys. 1, 2, 3. O ile w tych przypadkach opisu decydujących czynników i kryteriów ich poprawności można dokonać w sposób jednoznaczny i deterministyczny, o tyle charakterystyka i ocena z technologicznego punktu widzenia jest zwykle wypadkową rozmaitych uwarunkowań obowiązujących w danym zakładzie produkcyjnym. Z praktycznych doświadczeń oraz obserwowanych w obszarze organizacji procesów wytwarzania tendencji, wynika ogólne dążenie do ujednolicania konstrukcji elementów zębatach czego przejawem jest m.in. grupowanie uzębienia o tych samych wartościach kąta pochylenia linii śrubowej. Wynika z powyższego, że celowym i pożądanym działaniem byłoby szczegółowe rozpoznanie produkowanego asortymentu przekładni oraz projektowanych typoszeregów i po dokonaniu proponowanej tu analizy – wyznaczenie jednej obowiązującej w danym zakładzie wartości kąta  $\beta_2$ . Przy założeniu, że produkowane są przekładnie zębate ogólnego przeznaczenia, podejście to wydaje się uzasadnione. Jednakże dla przekładni specjalnych, produkowanych w układzie jednostkowym, generalizacja taka mogłaby być niewskazana – dlatego w kolejnych podrozdziałach opisano również możliwości dynamicznego doboru wartości kąta  $\beta_2$  i jego wpływ na charakter pracy przekładni.



Rys. 1. Wybrane kryteria dotyczące projektowania geometrii zazębienia



Rys. 2. Kryteria związane z wytrzymałością zazębnień



Rys. 3. Kryteria związane z eksploatacją przekładni

Prowadzenie wszelkich analiz oddziaływania jednej wielkości geometrycznej na pozostałe parametry charakterystyczne przekładni jest zadaniem złożonym z uwagi na mnogość formuł wielkości te opisujących. Dodatkowo, uzyskanie efektu „dynamizmu” w procesach obliczeniowych stanowi kolejne utrudnienie. W celu sprostania tym zadaniom, konieczne stało się stworzenie odpowiedniego systemu komputerowego, który w oparciu o paradygmat programowania obiektowego, umożliwi wizualizację graficzną żądanych wielkości w dowolnym układzie. Ponadto skonstruowano odrębny program w języku Mathematica, w celu weryfikacji poprawności uzyskanych efektów symulacji.

### 3. ANALIZA ODDZIAŁYWAŃ

#### 3.1. Podcinanie zębów

Warunkiem niewystępowania zjawiska podcinania zębów u podstawy jest założenie

$$x_{n2} \geq x_{gr2}, \quad (1)$$

przy czym:

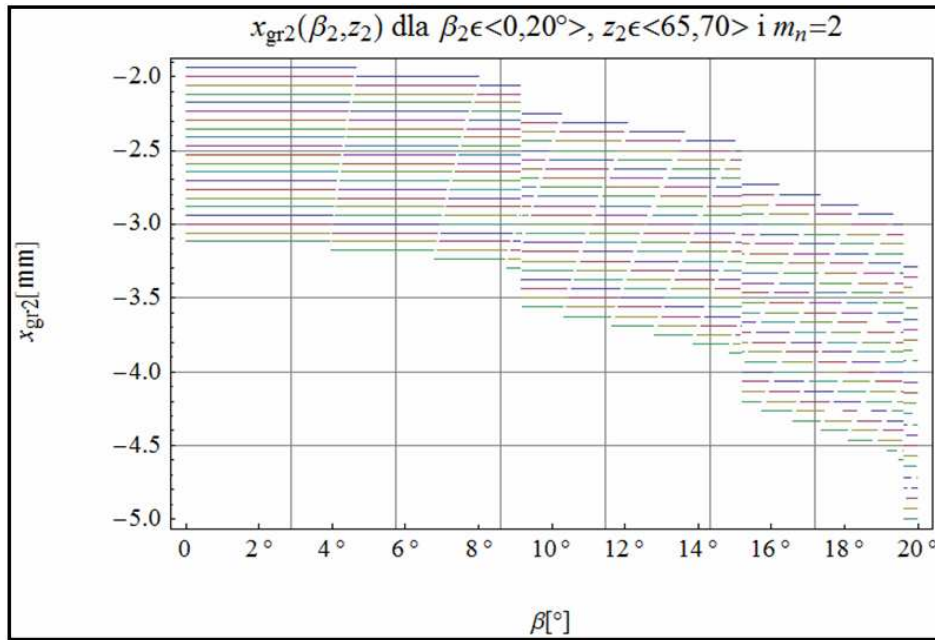
$$x_{gr2} = y_{n2} \cdot \frac{z_{gr2} - z_{z2}}{z_{gr2}}, \quad (2)$$

gdzie:

$$z_{z2} = \frac{z_2}{\cos^3 \beta_2}, \quad (3)$$

$$z_{gr2} = y_{n2} \cdot \left( \frac{2 \cos^3 \beta_2}{\sin^2 \alpha_{n2}} \right) \cdot (1 + \tan^2 \beta_2 \cdot \sin^2 \alpha_{n2}). \quad (4)$$

Przyjmując kąt  $\beta_2$ , jako zmienną niezależną oraz zakładając zakres zmienności  $\beta_2 = \langle 0, 20^\circ \rangle$ , sporządzono wykres granicznego współczynnika przesunięcia zarysu dla uzębienia o module  $m_{n2} = 2$  i liczbie zębów  $z_2 = \langle 65, 75 \rangle$ .



Rys. 4. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość granicznego współczynnika przesunięcia zarysu

Z rys. 4 wynika, że w miarę wzrostu  $\beta_2$  znacznie obniża się wartość  $x_{gr2}$ , co zmniejsza prawdopodobieństwo wystąpienia zjawiska podcinania zębów oraz powoduje rozszerzenie się obszaru możliwych rozwiązań uzębienia w rozumieniu opisanym w pracach [1,4,5]. Dyskretny charakter wykresu wynika z faktu, że w formule określającej graniczną liczbę zębów konieczne jest zastosowanie funkcji zaokrąglającej otrzymaną wartość do najbliższej całkowitej (*Round*).

### 3.2. Zaostrzenie głowy zęba

Parametrem określającym wielkość zaostrzenia głowy zęba jest grubość na średnicy wierzchołkowej. Oblicza się ją na podstawie formuły:

$$s_{na2} = d_{a2} \cdot \left( \frac{s_{tw2}}{d_{w2}} + \text{inv}\alpha_{tw2} - \text{inv}\alpha_{ta2} \right) \cdot \cos \beta_{a2}, \quad (5)$$

gdzie:

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot (y_{n2} + x_{n2} - k_{a2}^*) \cdot m_{n2}, \quad (6)$$

$$d_{w2} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_{tw12}}, \quad (7)$$

$$s_{tw2} = d_{w2} \cdot \left( \frac{s_{t2}}{d_2} + \text{inv}\alpha_{t2} - \text{inv}\alpha_{tw12} \right), \quad (8)$$

$$\alpha_{tw12} = \arccos \left( \frac{d_{b1} + d_{b2}}{2a_{12}} \right), \quad (9)$$

$$\alpha_{ta2} = \arccos \left( \frac{d_{b2}}{d_{a2}} \right), \quad (10)$$

$$\beta_{a2} = \arctan \left( \frac{d_{a2} \cdot \tan \beta_2}{d_2} \right), \quad (11)$$

przy czym:

$$d_2 = \frac{z_2 \cdot m_{n2}}{\cos \beta_2}, \quad (12)$$

$$d_{b2} = d_2 \cdot \cos \alpha_{t2}, \quad (13)$$

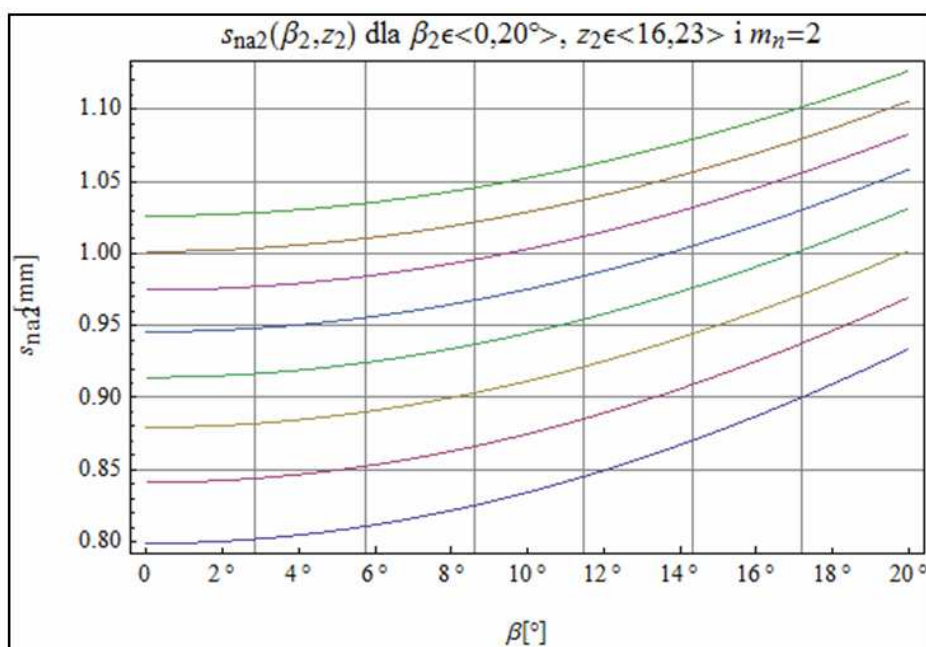
$$s_{t2} = \frac{s_{n2}}{\cos \beta_2}, \quad (14)$$

$$s_{n2} = m_{n2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2x_{n2} \tan \alpha_{n2} \right) - \frac{j_{n2}}{2}, \quad (15)$$

$$\alpha_{t2} = \arctan \left( \frac{\tan \alpha_{n2}}{\cos \beta_2} \right). \quad (16)$$

Wobec powyższego, grubość zęba u wierzchołka można kształtować nie tylko poprzez zmianę współczynnika korekcji (przesunięcia zarysu), lub modu-

łu normalnego przy założeniu stałości przełożenia i odległości międzyosiowej ( $i_{21} = const$ ,  $a_{12} = const$ ), co jest zwykle wykonywane w praktyce produkcyjnej, lecz i kąta pochylenia linii śrubowej zębów. Według [2,3,6,7], przyjmuje się najczęściej minimalną grubość zęba u wierzchołka jako  $s_{na2min} = 0,25 \cdot m_n$  dla uzębień o jednolitej strukturze materiałowej, natomiast dla uzębień podlegających obróbce cieplnej bądź cieplno-chemicznej –  $s_{na2min} = 0,4 \cdot m_n$ . W pewnych przypadkach, gdy projektowane jest uzębienie o niewielkiej liczbie zębów i istnieje prawdopodobieństwo zaostrenia głowy zęba, można poprzez zwiększenie wartości kąta  $\beta_2$  spowodować częściową niwelację tego zjawiska (patrz rys. 5).



Rys. 5. Wpływ kąta  $\beta_2$  na grubość zęba u wierzchołka

### 3.3. Wskaźniki zazębienia

Podstawowe formuły służące wyznaczeniu wskaźników zazębienia przedstawiają się następująco:

$$\varepsilon_{\alpha 12} = \frac{g_{\alpha 12}}{p_{et12}}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_{\beta 12} = \frac{b_{w12} \tan \beta_{b1}}{p_{et12}}, \quad (18)$$

gdzie:

$$g_{\alpha 12} = \frac{\sqrt{d_{h2}^2 - d_{b2}^2} + \sqrt{d_{h1}^2 - d_{b1}^2}}{2} - a \sin \alpha_{w12}, \quad (19)$$

$$p_{et1} = p_{t1} \cos \alpha_{t1}, \quad (20)$$

$$\beta_{b1} = \arcsin(\cos \alpha_1 \sin \beta_1), \quad (21)$$

oraz:

$$d_{h2} = d_{a2}, \quad d_{h1} = d_{d1}, \quad (22)$$

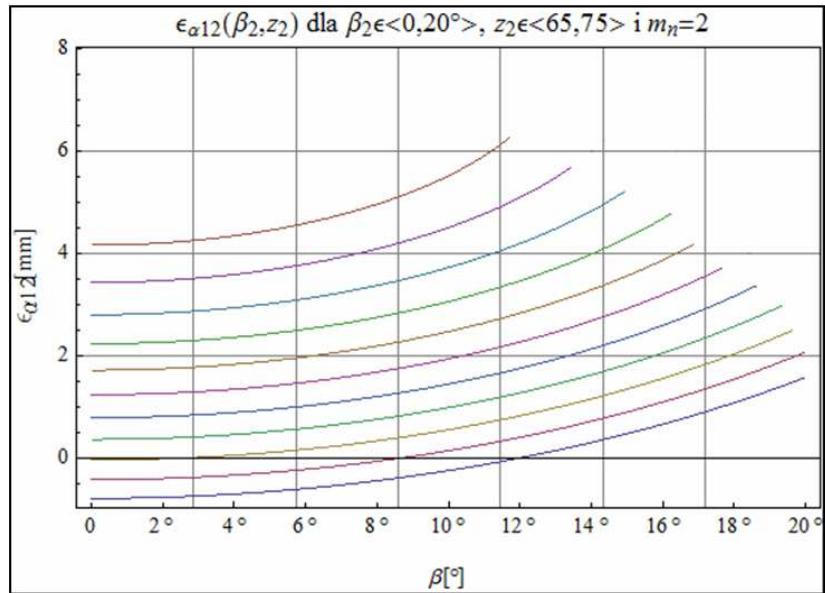
$$p_{t1} = \frac{m_{n1} \cdot \pi}{\cos \beta_1}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{\gamma 12} = \varepsilon_{\alpha 12} + \varepsilon_{\beta 12}. \quad (24)$$

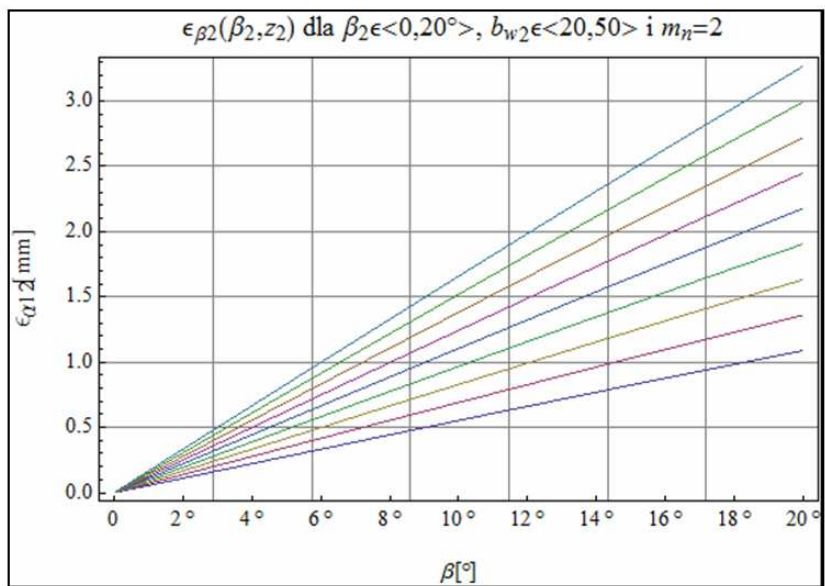
W praktyce zakłada się, by  $\varepsilon_{\alpha 12}$  przyjmował wartości z przedziału  $(1, 2)$ . Wraz ze wzrostem  $\varepsilon_{\alpha 12}$  zwiększa się płynność przekładni. Wobec powyższego, kształtowanie się wskaźnika uzależnione jest przede wszystkim od liczby zębów kół  $z_1$  oraz  $z_2$ , ponadto współczynnik ten rośnie wraz ze zmniejszaniem się kąta  $\alpha_{w12}$  oraz sumy  $x_{n1} + x_{n2}$ . Teoretycznie, w aspekcie geometrii ząbienia - wg [2,3] - dla uzębień prostych zakłada się  $\varepsilon_{\alpha 12} > 1$ , natomiast dla uzębień śrubowych  $\varepsilon_{\gamma 12} > 1$ . Z racji ogromnego wpływu wskaźników ząbienia nie tylko na ciągłość przyporu, ich wartości mogą być przyjmowane według innych kryteriów.

Z zamieszczonych poniżej wykresów (rys. 6 i rys. 7) wynika silna tendencja do zwiększania wartości obu wskaźników ząbienia w miarę wzrostu kąta pochylenia linii śrubowej uzębienia. W pracy [2,3] zwraca się uwagę, że jakiegokolwiek środki zmierzające do poprawy wskaźników ząbienia wpływają korzystnie na sztywność ząbienia, płynność pracy, obniżenie poziomu hałasu i wytrzymałość (stykową i na złamanie zęba). Wydaje się zatem, że przeprowadzenie szczegółowej analizy, w wyniku której następuje odpowiedni dobór nie tylko odpowiedniej liczby zębów i współczynników przesunięcia zarysu lecz również wartości kąta pochylenia linii śrubowej, jest zasadne.





Rys. 6. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość czołowego wskaźnika zazębienia



Rys. 7. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość poskokowego wskaźnika zazębienia

### 3.4. Długość czynnej części ewolwenty

Z punktu widzenia poprawnej eksploatacji przekładni, dużą rolę odgrywa ponadto różnica pomiędzy średnicą wierzchołkową uzębienia a średnicą początku czynnej oraz naciętej części ewolwenty. Wiedząc, że:

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot (y_{n2} + x_{n2}) \cdot m_{n2} \quad (25)$$

$$d_{l2} = 2 \sqrt{\left(\frac{d_{f2}}{2} + c \cdot m_{n2}\right)^2 + \left(\left(\frac{d_2}{2} - \left(\frac{d_{f2}}{2} + c \cdot m_{n2}\right)\right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{t2}\right)^2} \quad (26)$$

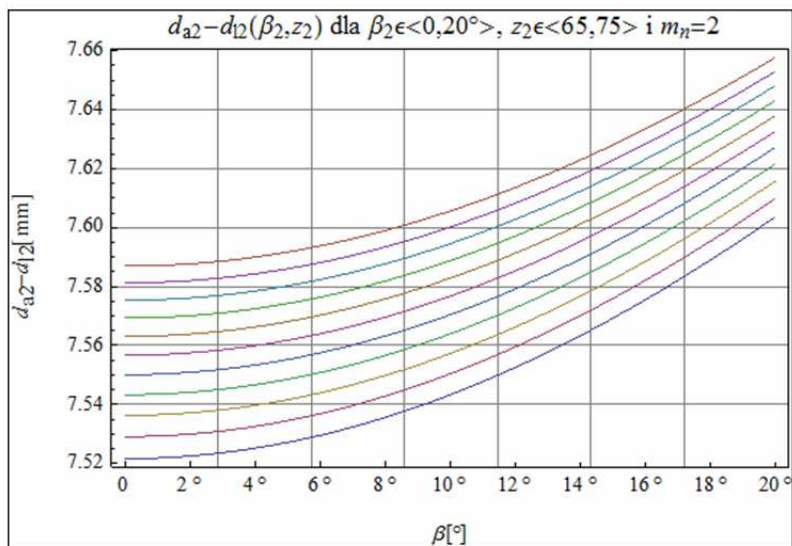
$$d_{p2} = 2 \cdot \sqrt{\rho_{tp2}^2 + \frac{d_{b2}^2}{4}} \quad (27)$$

gdzie:

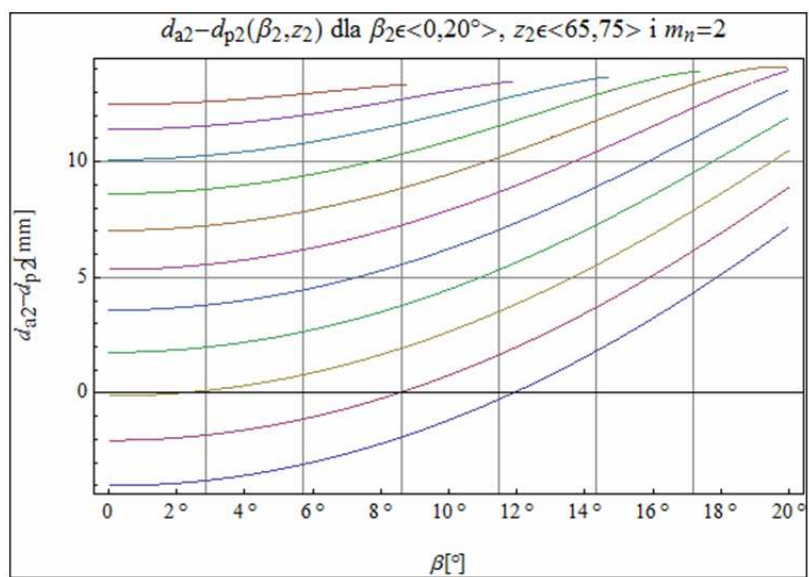
$$\rho_{tp2} = \rho_{th2} - g_{at12} \quad (28)$$

$$\rho_{th2} = \frac{\sqrt{d_{h2}^2 - d_{b2}^2}}{2} \quad (29)$$

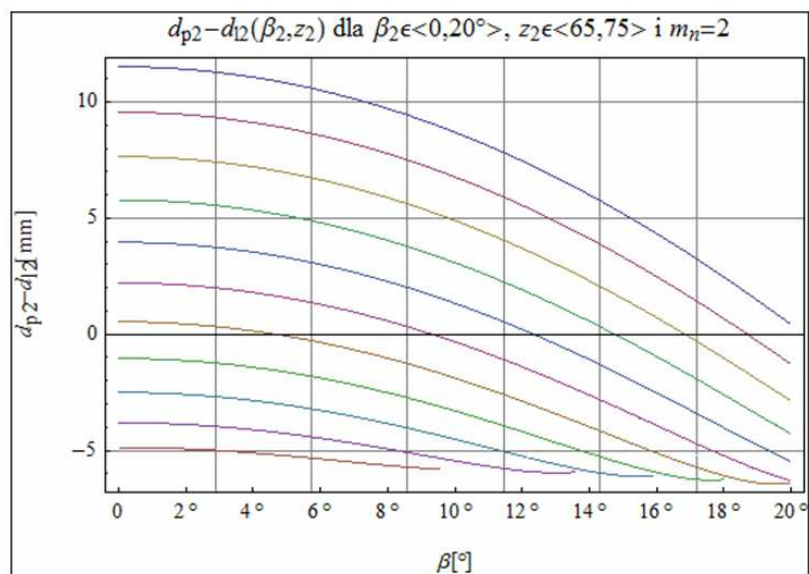
zbadano wpływ kąta pochylenia linii zęba na wielkości  $(d_{a2} - d_{l2})$ ,  $(d_{a2} - d_{p2})$  oraz  $(d_{p2} - d_{l2})$  i przedstawiono graficznie poniżej.



Rys. 8. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość różnicy  $(d_{a2} - d_{l2})$



Rys. 9. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość różnicy  $(d_{a2} - d_{p2})$



Rys. 10. Wpływ kąta  $\beta_2$  na wartość różnicy  $(d_{p2} - d_{l2})$

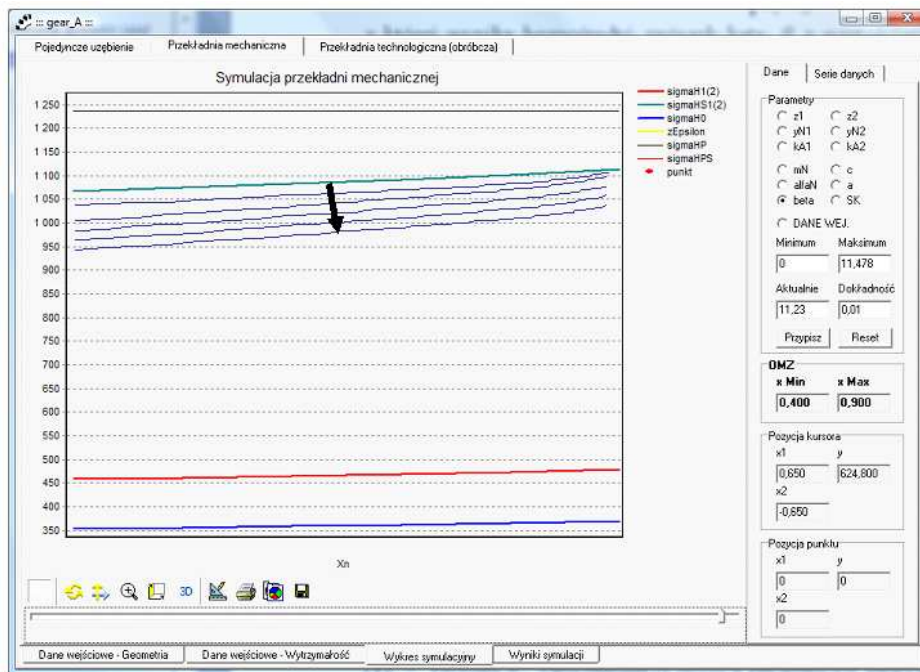
Na rys. 8 obserwuje się wzrost długości naciętej części ewolwenty w miarę wzrostu kąta  $\beta_2$ , co sugeruje korzystne zmiany w układzie pary współpracującej (np. wydłużenie ewolwenty). Rys. 9 wykazuje tendencje wzrostowe również dla czynnej części ewolwenty, choć nie dla wszystkich skojarzeń uzębień część taka istnieje. Można jednak określić taką wartość kąta  $\beta_2$ , dla której wszystkie skojarzenia z analizowanego zbioru zazębnień okażą się poprawne. Nieco inaczej przedstawia się różnica  $(d_{p2} - d_{l2})$ , która zawsze powinna być wartością dodatnią, aby nie doszło zakłócenia współpracy spowodowanego kolizją z karbem szlifierskim. Z rys. 10 wnioskuje się zatem, że bierny odcinek ewolwenty ulega skróceniu przy zwiększającym się kącie  $\beta_2$ , lecz dla każdej pary współpracującej istnieje graniczna wartość  $\beta_2$ , której przekroczenie nie jest wskazane.

### 3.5. Naprężenia stykowe boku zęba

Analizę naprężeń stykowych boku zęba przeprowadzono zgodnie z metodyką ISO przedstawioną w [2,3] i celem dynamicznej wizualizacji efektu wpływu kąta  $\beta_2$ , wykorzystano program obiektowy *Gear-A* stworzony w Katedrze Inżynierii Produkcji ATH. Zgodnie z metodą B, wartości maksymalnych obliczeniowych naprężeń stykowych wyznacza się z zależności

$$\sigma_{HS1,2} = Z_H \cdot Z_{B,D} \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_{t\max}}{d_1 \cdot b_w} \cdot \frac{u+1}{u}} \cdot \sqrt{K_{vH\max} \cdot K_{H\beta\max} \cdot K_{H\alpha\max}}$$

z której wynika bezpośredni związek kąta  $\beta_2$  z wartościami współczynników  $Z_\beta$ ,  $Z_\varepsilon$  oraz  $Z_{B,D}$ . Przeprowadzona symulacja komputerowa potwierdziła spodziewany spadek naprężeń stykowych przy wzrastającej wartości kąta  $\beta_2$ .



Rys. 11. Symulacja zmiany wartości naprężeń obliczeniowych boku zęba

#### 4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Przeprowadzona w ramach niniejszej publikacji analiza wpływu wartości kąta pochylenia linii śrubowej zębów na kształtowanie się wybranych parametrów charakterystycznych układu zazębienia pary współpracującej, wskazuje szereg korzystnych oddziaływań, wśród których do najważniejszych należy zaliczyć:

- zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia zjawiska podcinania zębów oraz zaostrenia głów zębów,
- poprawę warunków eksploatacyjnych przekładni (a w konsekwencji zwiększenie sztywności zazębienia, płynności pracy, obniżenie poziomu hałasu),
- zwiększenie czynnego przedziału pracy ewolwenty, co rzutuje na poprawę śladu dolegania a tym samym na korzystny rozkład naprężeń stykowych i zmniejszenie ich wartości.

## LITERATURA

- [1] HERMA S.: *Optymalizacja doboru parametrów zazębień w ewolwentowych walcowych przekładniach zębatych ogólnego przeznaczenia*, Praca doktorska, WBMiI ATH, Bielsko – Biała 2002,
- [2] JAŚKIEWICZ Z., WĄSIEWSKI A.: *Przekładnie walcowe – geometria – wytrzymałość – dokładność wykonania*, t.1, wyd. 1, WKŁ Warszawa 1992 r.
- [3] JAŚKIEWICZ Z., Wąsiewski A.: *Przekładnie walcowe*, t.2, WKŁ Warszawa 1995 r.
- [4] MATUSZEK J., HERMA S.: *Ewolwentowe walcowe przekładnie zębate ogólnego przeznaczenia. Podstawy projektowania*, Wyd. ATH, Bielsko – Biała 2002,
- [5] MATUSZEK J., HERMA S.: *Ewolwentowe walcowe przekładnie zębate ogólnego przeznaczenia. Komputerowe wspomaganie projektowania*, Wyd. ATH, Bielsko – Biała 2002,
- [6] MULLER L.: *Przekładnie zębate – projektowanie*, WNT W-wa, 1996.
- [7] OCHĘDUSZKO K.: *Koła zębate – sprawdzanie*, t.3, WNT, Warszawa 1972 r.