ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ Nr 281
Elektrotechnika z. 31 2011

Marek GOTFRYD
Politechnika Rzeszowska

FILTR GAUSSA – WŁAŚCIWOŚCI, REALIZOWALNOŚĆ, ZASTOSOWANIE

Przedstawiono teoretyczne właściwości filtru Gaussa, aproksymację jego charakterystyki częstotliwościowej i syntezę jego transmitancji operatorowej. Pokazano właściwości rzeczywistych filtrów Gaussa i różnice w porównaniu z filtrem idealnym. Przedstawiono przykład zastosowania tego filtru w telekomunikacji.

1. Wprowadzenie

Z filtrami elektrycznymi spotykamy się bardzo często. Spośród ich wielu typów w świadomości inżynierów i techników elektroniki czy telekomunikacji utrwaliły się na pewno nazwy filtrów Butterwortha, Czebyszewa i np. Bessela (eliptyczne). Filtry te mają określone właściwości, specyficzne dla jednego parametru, i ze względu na nie są stosowane. Znacznie rzadziej spotyka się filtr Gaussa, a ma on ciekawe właściwości i jego synteza jest ciekawa, dlatego informacje o nim warte są rozpowszechnienia.

2. Teoretyczne właściwości filtru Gaussa

Filtr Gaussa jest określany jako filtr, którego odpowiedź impulsowa (na pobudzenie impulsem Diraca) jest funkcją Gaussa, tzn. funkcją wykładniczą zależną od ujemnego kwadratu czasu [1, 6]:

$$h_g(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} \tag{1}$$

Współczynnik przed funkcją wykładniczą nie jest konieczny, ale przy podanej jego wartości całka z odpowiedzi impulsowej jest równa jedności. Odpowiedź (1) jest określona dla t < > 0, a więc formalnie filtr Gaussa o takiej definicji jest nierealizowalny, bo jest nieprzyczynowy. Jak można dość łatwo obliczyć, transformata Fouriera odpowiedzi (1) jest równa:

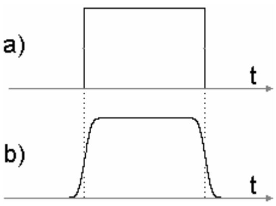
$$H_g(j\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \tag{2}$$

Jest ona rzeczywista – argument jej jest równy zeru. Jest to inaczej transmitancja filtru Gaussa przy pobudzeniu sinusoidalnym, zatem niezależnie od częstotliwości filtr ten nie wprowadza żadnego przesunięcia fazowego (!), ale dotyczy to filtru idealnego.

Transformata Fouriera odpowiedzi impulsowej jest też funkcją Gaussa (ale w dziedzinie częstotliwości). Zatem filtr Gaussa można scharakteryzować tym, że i odpowiedź impulsowa, i transmitancja są funkcjami Gaussa – są podobne do siebie; żaden inny znany filtr nie ma takiej właściwości, aby odpowiedź impulsowa i transmitancja wyrażały się podobnymi zależnościami (uwzględniając oczywiście inne argumenty). Przyjmując typowe kryterium (–3 dB) dla częstotliwości granicznej dolnoprzepustowego filtru Gaussa, jego szerokość pasma można na podstawie (2) obliczyć:

$$B_g = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha \ln 2}{2}} \tag{3}$$

Odpowiedź dowolnego filtru na skok jednostkowy jest całką z jego odpowiedzi impulsowej. Odpowiedź (1) jest zawsze dodatnia, wykazuje symetrię i maksimum dla t = 0, dlatego odpowiedź jednostkowa filtru Gaussa jest monotoniczna i wykazuje punkt przegięcia dla t = 0. Przy pobudzeniu filtru Gaussa impulsem prostokątnym o większej szerokości na wyjściu filtr otrzymuje „zaokrąglony” impuls, z symetrycznymi zboczami narastającymi i opadającymi, bez żadnych tzw. przerzutów i oscylacji (rys. 1.) – jest to cecha pożądana w różnych układach impulsowych.

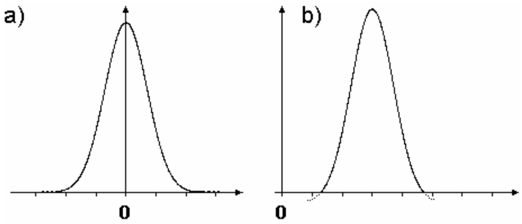


Rys. 1. Przykładowe pobudzenie prostokątne idealnego filtru Gaussa (a) i jego odpowiedź (b)

Jest to ponownie jedyny filtr o takim charakterze odpowiedzi jednostkowej. Jak wynika z literatury [6], pod tym względem znacznie podobny jest filtr Bessela, ale jego odpowiedź jednostkowa wykazuje jednak niewielki przerzut, natomiast filtr Gaussa – żadnego, także zapewnia on nieco mniejszy czas narastania niż filtr Bessela [6].

3. Realizowalność filtru Gaussa

Odpowiedź impulsowa filtru Gaussa, pokazana na rys. 2a, jest nieprzyczynowa (zaczyna się wcześniej, niż nastąpiło pobudzenie, i do tego jeszcze zaczyna się dla $t = -\infty$), zatem filtr nie może być fizycznie zrealizowany. Dlatego konieczna jest jakaś aproksymacja takiej charakterystyki czasowej – jej opóźnienie i „ucięcie”, aby była realizowalna; można to także przenieść w dziedzinę częstotliwości, tzn. aproksymacji może podlegać transmitancja filtru, wyrażona wzorem (3).



Rys. 2. Odpowiedź filtru Gaussa: a) idealnego, b) przykładowego filtru rzeczywistego o skończonym czasie trwania odpowiedzi

Realizację dowolnego filtru wykonanego z elementów o stałych skupionych rozpoczyna się od wyrażenia jego transmitancji w postaci operatorowej funkcji wymiernej:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{n_0+n_1s+n_2s^2+n_3s^3+...+n_ks^k}{d_0+d_1s+d_2s^2+d_3s^3+...+d_ms^m},\quad k\le m<\infty \tag{4}$$

gdzie, ze względu na stabilność, wielomian D(s) musi mieć zera w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s; metody syntezy takich funkcji transmitancji są znane [1]. Od stopnia wielomianu D(s) zależy rząd filtru i liczba elementów niezbędnych do jego syntezy.

Z filtrem Gaussa jest „problem” – jego transmitancja w dziedzinie częstotliwości (3) nie wyraża się funkcją wymierną. Czy zatem rząd takiego filtru jest zerowy? Ale można na to spojrzeć wręcz przeciwnie. Znane jest rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg McLaurina [4]:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4... \tag{5}$$

zatem transmitancję (3) można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu:

$$H_g(j\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}=\frac{1}{e^{\frac{\omega^2}{4\alpha}}}=\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{4\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)^2+....} \tag{6}$$

Przy takim spojrzeniu na ten problem filtr Gaussa może jawić się jako filtr o rzędzie nieskończonym! Powstaje więc konieczność ograniczenia rozwinięcia potęgowego (6) do skończonej liczby wyrazów (i przejścia następnie do transmitancji operatorowej), ale niestety nie będzie to wtedy idealny filtr Gaussa; jego charakterystyka i właściwości będą aproksymowane w większym lub mniejszym stopniu.

4. Aproksymacja charakterystyki częstotliwościowej i synteza funkcji transmitancji

Rozważmy teraz problem aproksymacji filtru Gaussa o jednostkowej pulsacji granicznej. Na podstawie (3) i (4) transmitancja ta (i jednocześnie jej moduł) może być wyrażona jako:

$$H(\omega) = e^{-\frac{\ln 2}{2}\omega^2} \cong e^{-0{,}3466\cdot\omega^2} \tag{7}$$

natomiast kwadrat jej modułu (wygodniejszy w dalszych rozważaniach) można wyrazić w postaci:

$$\left|H(\omega)\right|^2 = e^{-\ln 2\cdot\omega^2} \cong e^{-0{,}6931\cdot\omega^2} \tag{8}$$

Zastosowanie do tej ostatniej wielkości rozwinięcia w szereg według (6) da w efekcie:

$$e^{-0{,}6931\cdot\omega^2 \ldots} = \frac{1}{1 + 0{,}6931\cdot\omega^2 + 0{,}2402\cdot\omega^4 + 0{,}0555\cdot\omega^6 + 0{,}0096\cdot\omega^8 + \ldots} \tag{9}$$

Zazwyczaj przy syntezie filtru dana jest jego transmitancja (moduł) $\left|H(j\omega)\right|$ i poszukiwana jest postać operatorowej funkcji wymiernej H(s), której moduł dla s = jω byłby równy transmitancji zadanej. Istotne jest więc tu przejście:

$$\left|H(j\omega)\right| \xrightarrow{?} H(s)$$

Przejście to, może wbrew oczekiwaniom, nie jest takie oczywiste. Rozważmy bardzo prosty przypadek filtru Butterwortha o module transmitancji:

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad \text{albo} \quad \left|H(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

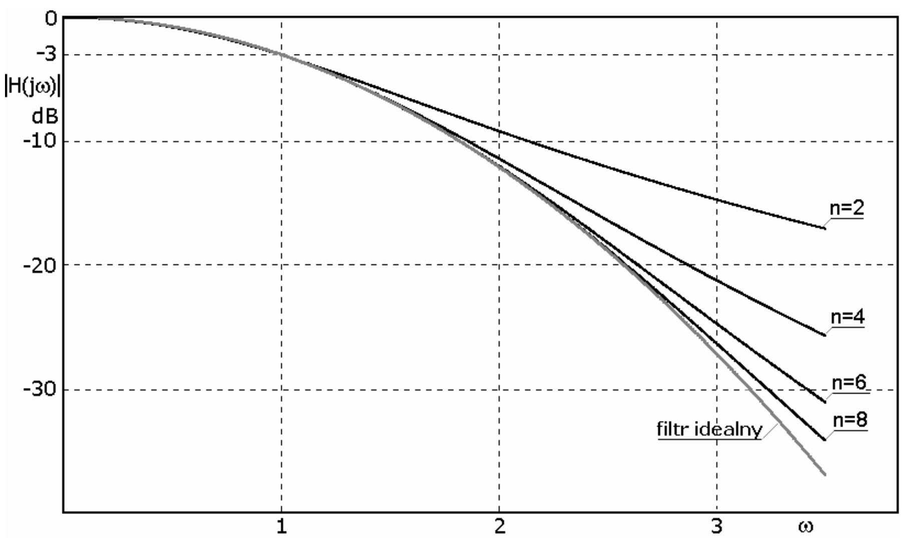
Jeżeli do tego wyrażenia podstawić „mechanicznie” ω = s/j, otrzyma się:

$$\left|H(s)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{albo} \quad \left|H(s)\right|^2 = \frac{1}{1-s^2},$$

gdzie obecność znaku minus może nas wprawić w zakłopotanie. W przypadku bardziej złożonych transmitancji $\left|H(j\omega)\right|$ zgadywanie postaci funkcji H(s) na pewno się nie powiedzie. Dlatego w takim przypadku postępuje się według poniższej procedury:

1) do kwadratu modułu wymaganej transmitancji filtru $H(j\omega)$ podstawia się $\omega = s/j$,
2) w mianowniku otrzymuje się wielomian zmiennej s o różnych, dodatnich i ujemnych współczynnikach,
3) dokonuje się rozkładu tego wielomianu na iloczyn wielomianów D(s) i D(-s); w tym celu rozkłada się go na elementarne czynniki typu $s \pm \alpha$ i $s^2 \pm \beta s + \gamma$,
4) wszystkie czynniki o zerach leżących w lewej półpłaszczyźnie tworzą szukany wielomian D(s), pozostałe tworzą wielomian D(-s).

Im więcej wyrazów w rozwinięciu (9) zostanie uwzględnionych, czyli im większy jest rząd filtru, tym dokładniej jest aproksymowana charakterystyka idealnego filtru Gaussa i w szerszym pasmie. Widoczne jest to na rys. 3., gdzie pokazano przebieg modułu transmitancji rzeczywistych filtrów Gaussa rzędów 2, 4, 6 i 8 w porównaniu z charakterystyką filtru idealnego (o rzędzie nieskończonym) [2]. Przy wyższych rzędach aproksymacji występuje dobra zgodność charakterystyk nawet „głęboko” w pasmie zaporowym.

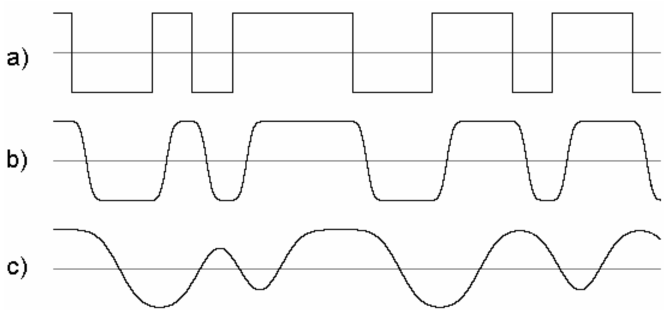


Rys. 3. Transmitancja (moduł) idealnego i rzeczywistego filtru Gaussa dla stopni 2, 4, 6, 8; zastosowano skalę logarytmiczną dla modułu transmitancji

5. Zastosowanie

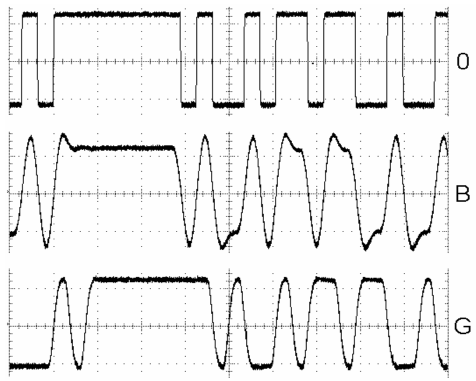
Specyfikacje kilku standardów telekomunikacyjnych zawierają informacje o stosowaniu filtracji filtrem Gaussa. Filtracja taka stosowana jest np. w telefonii komórkowej GSM, w telefonii DECT i w systemie Bluetooth.

Stosowana w systemie GSM modulacja cyfrowa nosi nazwę GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*) [3, 5]. Polega ona na tym, że dane cyfrowe przepuszczane są przez filtr Gaussa o BT = 0,3 (B – pasmo filtru, T – czas trwania jednego bitu) i następnie modulują modulator FSK o indeksie modulacji h = 0,5. Daje to radykalne zawężenie zajmowanego pasma, ale niestety też tzw. interferencje międzysymbolowe (rys. 4c). Uzyskanie wąskiego pasma jest tu ważniejsze, dlatego te interferencje się toleruje, odpowiednio rozbudowując układy odbiorcze, aby zredukować możliwość błędnego dekodowania tak zniekształconego sygnału cyfrowego.



Rys. 4. Przykładowe przebiegi cyfrowe: a) na wejściu filtru Gaussa, b) na wyjściu filtru o BT = 1, c) na wyjściu filtru o BT = 0,3

Porównanie tego, jak różni się sygnał cyfrowy przy przechodzeniu przez rzeczywisty filtr Gaussa i Butterwortha, pokazano na rys. 5. Widoczne jest, że ten drugi daje tzw. przerzuty, których pozbawiona jest odpowiedź filtru Gaussa.



Rys. 5. Rezultaty praktycznych pomiarów przechodzenia sygnału cyfrowego (0) przez filtr Butterwortha (B) i filtr Gaussa (G) o tych samych częstotliwościach granicznych

6. Podsumowanie

Przedstawiono właściwości, syntezę oraz zastosowanie filtru Gaussa, będącego rzadziej stosowanym i mniej znanym filtrem. Z powodu swoich właściwości (brak oscylacji i przerzutów w odpowiedzi jednostkowej) filtr Gaussa może znaleźć zastosowanie w technice impulsowej, wszędzie tam gdzie istotne jest, aby impulsy miały symetrycznie ukształtowane zbocza, np. w analogowej technice TV. Filtr Gaussa (oraz Bessela) należy do grupy filtrów, których transmitancje muszą być aproksymowane skończonym wielomianem, gdyż teoretycznie dane są one funkcjami wykładniczymi.

Literatura

1. Chen W.K., *The Circuits and Filters Handbook*, CRC, 2002.
2. Filter Solutions – portal firmy Nuhertz Technologies: http://www.nuhertz.com.
3. Kuchi K., Prabhu V.K., *Power spectral density of GMSK modulation using matrix methods*, „Military Communications Conference Proceedings" 1999, Vol. 1. 45-50.
4. Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 2008.
5. Murata K., Hirade K., *GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony*, IEEE Trans. Communications 1981, Com-29, No. 7, 1044-1050.
6. Paarmann L.D., *Design and Analysis of Analog Filters – A Signal Processing*, Perspective Kluwer Academic Publishers, N.Y., 2003.

GAUSS FILTER – PROPERTIES, REALIZABILITY, APPLICATION

Summary

There are presented theoretical properties of the ideal Gauss filter. There is depicted an approximation of its frequency response. It leads to the real Gauss filter. There are shown its properties and the differences to the ones of the ideal filter. An application of Gauss filter for symmetrical smoothing of a digital pulse train is presented.

Złożono w redakcji w lipcu 2011 r.

Autor:

Dr hab. inż. Marek Gotfryd, prof. PRz., Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, 35-959 Rzeszów, e-mail: margot@prz.edu.pl