ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ Nr 272
Zarządzanie i Marketing z. 17 (4/10) 2010

Lev MOROZOV[1]
Paweł MERŁO[2]

KONCEPCJA PROGU RENTOWNOŚCI W UJĘCIU STOCHASTYCZNYM I JEJ WYKORZYSTANIE W PRAKTYCE GOSPODARCZEJ

W pracy przedstawiono koncepcję progu rentowności w ujęciu stochastycznym. Podstawową zaletą tej koncepcji jest możliwość jej wykorzystania przy produkcji wieloasortymentowej, co eliminuje podstawowe niedoskonałości klasycznej metody CVP.

1. WPROWADZENIE

W zarządzaniu przedsiębiorstwem szczególnie ważne jest określenie prawidłowości zmian przychodów i kosztów zarówno w zależności od czasu, jak i w zależności od ilości sprzedanych wyrobów. Efektywność zarządzania przedsiębiorstwem w znacznym stopniu zależy od przebiegu czasowego przychodów i kosztów oraz ich wspólnej relacji do wielkości produkcji, czyli od analizy *break-event points*.

Analiza koszt–wolumen–zysk (CVP) jest jedną z bardziej efektywnych i prostych metod analizy finansowej wykorzystywaną w planowaniu bieżącym i strategicznym w działalności przedsiębiorstw. Zgodnie z jej założeniami teoretycznymi, zysk (stratę) można przedstawić jako funkcję przychodów, kosztów całkowitych oraz wolumenu sprzedaży:

$$Z = f\left(P; K_C; Q\right) \tag{1}$$

gdzie:

Z – zysk (strata)
P – całkowity przychód
K_C – całkowity koszty
Q – wolumen (ilość jednostek określających przychód).

W modelu można wyznaczyć taką wielkość produkcji, z której przychody zapewniają pokrycie kosztów całkowitych. Stanowi ona próg rentowności, nazywany też punktem krytycznym lub punktem bez straty (*break-even point*).

Model analizy CVP w klasycznym rozumieniu pozwala ocenić ilościowy próg rentowności:

$$Q_{PR} = \frac{K_{St}}{c + k_{zm}} \tag{2}$$

[1] Prof. dr hab. Lew Morozov, Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania.
[2] Dr Paweł Merło, Katedra Makroekonomii, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski.

gdzie:

c – cena jednostki produkcji
k_{zm} – koszty zmienne jednostkowe
K_{St} – koszty stałe.

Model ten jest ograniczony szeregiem założeń:

1. Koszty całkowite podzielone są na koszty stałe i koszty zmienne.
2. Każdej wartości kosztów całkowitych odpowiada określona wartość sprzedanych wyrobów.
3. Koszty stałe w badanym okresie nie ulegają zmianie.
4. Jednostkowe koszty zmienne w badanym okresie nie zmieniają się.
5. Cena wyrobów w badanym okresie jest stała.

Dla kadry menedżerskiej przedsiębiorstw szczególnie ważna jest odpowiedź na pytanie, kiedy sprzedaż zacznie przynosić zyski. Nie mniej ważne są informacje o prognozie kosztów i przychodów oraz o prawidłowościach zmian PR. Z tego względu, że koszty są kategorią pierwotną w stosunku do przychodów, ważne jest uzyskanie informacji o warunkach pokrycia całkowitych kosztów firmy i osiąganych zyskach w rezultacie realizowanych przedsięwzięć. W tym celu przydatne jest posługiwanie się progiem rentowności (*break-even point*) oraz analizą progu rentowności (*break-even analysis*).

Analiza CVP znacznie się komplikuje przy produkcji wieloasortymentowej. Matematyczne równanie równowagi w punkcie krytycznym, które pozwala wyznaczyć próg rentowności dla produkcji wieloasortymentowej, można zapisać jako:

$$K_{St} + \sum_{i=1}^{n}(k_{zm,i} \cdot Q_{PR,i}) = \sum_{i=1}^{n}(C_i \cdot Q_{PR,i}) \tag{3}$$

gdzie:

K_{St} – całkowite koszty stałe
$k_{zm,i}$ – jednostkowy koszt zmienny i-tego produktu
$Q_{PR,i}$ – wielkość sprzedaży i-tego produktu
C_i – jednostkowa cena sprzedaży i-tego produktu

Wartościowy próg rentowności $Q_{W,i}$ można przedstawić jako:

$$Q_{W,i} = Q_{PR,i} \cdot C_i \tag{4}$$

Skąd wynika, że:

$$Q_{W,i} = \frac{K_{st,i}}{C_i + k_{zm,i}} \cdot C_i = \frac{K_{st,i}}{1 + \frac{k_{zm,i}}{C_i}} \tag{5}$$

Przy wyznaczeniu PR dla produkcji wieloasortymentowej wykorzystuje się różne podejścia w zależności od ilości asortymentów produkcji. Niezależnie od rodzaju wykorzystanej metody – czy będzie to metoda dla pojedynczego wyrobu, czy dla kilku wyrobów – należy dokonać podziału kosztów całkowitych na koszty stałe i koszty zmienne, co zazwyczaj przysparza wielu kłopotów.

Wyznaczenie progu rentowności może nastąpić przez ustalenie minimalnego poziomu sprzedaży za pomocą złożonej przeciętnej stopy marży brutto tylko wtedy, gdy można uwzględnić jednostkowe ceny sprzedaży, jednostkowe koszty zmienne asortymentowe, koszty stałe dotyczące całości przedsiębiorstwa oraz rozmiary sprzedaży każdego z rodzajów wyrobów. W tym wypadku próg rentowności liczymy za pomocą następującego wzoru:

$$PR_W = \frac{K_C}{1-\frac{K_C}{P}} \tag{6}$$

gdzie:
PR_W – próg rentowności wartościowy
K_C – całkowite koszty stałe
P – przychody ze sprzedaży

W realnych warunkach wykorzystanie tych metod jest niemożliwe. W celu otrzymania możliwości oceny efektywności działania przedsiębiorstw i jej prognozy w realnych warunkach pracy dokonano analizy finansowo-operacyjnej w aspekcie stochastycznym.

2. ANALIZA CVP DLA PRODUKCJI WIELOASORTYMENTOWEJ

Funkcje przychodów i kosztów można rozpatrywać w dwóch aspektach. Jako szeregi czasowe:

$$P = f(t)\; K_C = f(t) \tag{7}$$

oraz jako wartości (przychody i koszty) w zależności od sprzedanej produkcji (produkowanej):

$$P = f(Q)\; K_C = f(Q) \tag{8}$$

Metoda analizy finansowo-operacyjnej w aspekcie stochastycznym opiera się na układzie równań:

$$P = C \cdot Q \tag{9}$$

$$K_C = K_{St} + K_{Zm} \tag{10}$$

$$K_C = K_{St} + k_{zm} \cdot Q \tag{11}$$

gdzie:
Q – określa ilość sprzedanych wyrobów (wyprodukowanych)
K_C – koszty całkowite
K_{St} – koszty stałe całkowite
K_{Zm} – koszty zmienne całkowite
K_{Zm} – koszty zmienne jednostkowe.

Funkcja przychodów produkcji wieloasortymentowej w aspekcie stochastycznym ma postać:

$$P = f\left(\sum_{i=1}^{i=n}(C_i Q_i)\right) \tag{12}$$

$$\left(P_{F_j}\right)_i = C_{F_j} \cdot \left(Q_{F_j}\right)_i \tag{13}$$

gdzie:

C_{Fj} jest F_j-kwantylem rozkładu cen produkcji
$(Q_{Fj})_i$ - określa ilość sprzedanych wyrobów względem ceny C_{Fj}.

Funkcję kosztów całkowitych produkcji wieloasortymentowej można zapisać jako:

$$K_C = K_{St} + \sum_{i=1}^{n}\left((k_{Zm})_i \cdot \left(Q_{F_j}\right)\right)_i \tag{14}$$

W aspekcie stochastycznym ma ona postać:

$$\tilde{K}_C = \bar{b}_1 + \bar{b}_2\left(Q_{F_j}\right) \tag{15}$$

W równaniu tym funkcja kosztów odpowiada F_j kwantyli rozkładu cen produkcji, tak że:

$$\bar{b}_1 = K_{St} \tag{16}$$

Stąd:

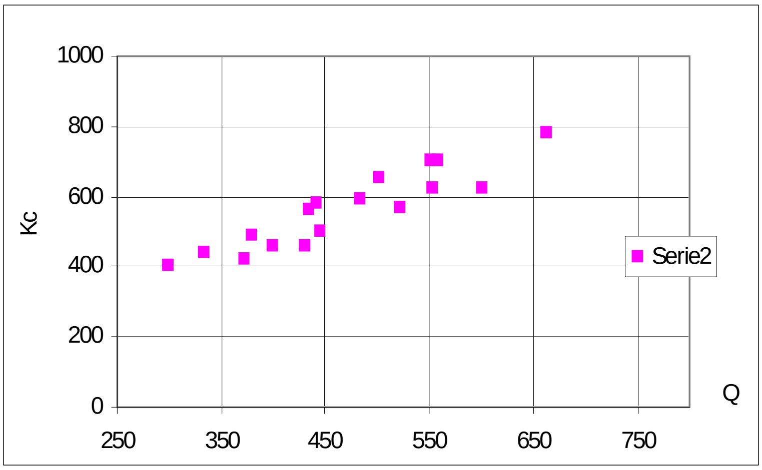
$$\bar{b}_2\left(Q_{F_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((k_{Zm})_i \cdot \left(Q_{F_j}\right)\right)_i \tag{17}$$

Funkcja kosztów podlega prawu regresji liniowej, w związku z czym dla analizy stochastycznej funkcję kosztów i przychodów wprowadzamy w postaci liniowej:

$$\tilde{P} = \bar{a}_0 + a_1 Q \tag{18}$$

$$\tilde{K}_C = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 Q \tag{19}$$

Rys. 1. Koszty całkowite w funkcji Q dla danych doświadczalnych.



Źródło: Opracowanie własne.

Według metody MNK otrzymujemy więc dwa układy równań liniowych dla wyznaczenia ocen parametrów $\overline{a}_0$; $\overline{a}_1$; $\overline{b}_0$; $\overline{b}_1$ w postaci:

$$\begin{cases} n\overline{a}_0 + \overline{a}_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \\ \overline{a}_0 \sum_{i=1}^{n} Q_i + \overline{a}_1 \sum_{i=1}^{n} (Q_i^{\,2}) = \sum_{i=1}^{n} (P_i Q_i) \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} n\overline{b}_0 + \overline{b}_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} K_{C;i} \\ \overline{b}_0 \sum_{i=1}^{n} Q_i + \overline{b}_1 \sum_{i=1}^{n} (Q_i^{\,2}) = \sum_{i=1}^{n} (K_{C;i} Q_i) \end{cases} \tag{21}$$

Układ równań (20) w postaci macierzowej można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} n & \sum Q_i \\ \sum Q_i & \sum\left(Q_i^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a}_0 \\ \overline{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\left(P_i\right) \\ \sum\left(Q_i P_i\right) \end{bmatrix} \tag{22}$$

A więc:

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} n & \sum Q_i \\ \sum Q_i & \sum\left(Q_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$a = \begin{bmatrix} \overline{a}_0 \\ \overline{a}_1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

gdzie:

Q^T- oznacza macierz transponowaną, oraz $(Q^T)^T=Q$.

P – jednokolumnowa macierz przychodów, która w modelu występuje jako wektor o wymiarze $n \times 1$, obserwacji przychodów P_{nx1}

$a = \begin{bmatrix} \overline{a}_0 \\ \overline{a}_1 \end{bmatrix}$ – wektor parametrów w równaniu przychodów, które należy oszacować.

Układ równań (21) w postaci macierzowej można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} n & \sum Q_i \\ \sum Q_i & \sum\left(Q_i^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_0 \\ \overline{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\left(K_{C,i}\right) \\ \sum\left(Q_i K_{C,i}\right) \end{bmatrix} \tag{25}$$

A więc:

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} n & \sum_i Q_i \\ \sum_i Q_i & \sum_i Q_i^2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$b = \begin{bmatrix} \overline{b}_0 \\ \overline{b}_1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

gdzie:

$(K_C)_{nx1}$ – jednokolumnowa macierz kosztów całkowitych, która w modelu występuje jako wektor o wymiarze $n \times 1$, obserwacji kosztów całkowitych

ε jest wektorem o wymiarze $m \times 1$

1 – wektor jednostkowy.

Wykorzystując metodę macierzy odwrotnej, rozwiązanie możemy przedstawić w postaci równań macierzowych:

$$\left(Q' \cdot Q\right)^{-1} \cdot \left(Q' \cdot P\right) = \begin{bmatrix} \overline{a}_0 \\ \overline{a}_1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

oraz

$$\left(Q' \cdot Q\right)^{-1} \cdot \left(Q' \cdot K_C\right) = \begin{bmatrix} \overline{b}_0 \\ \overline{b}_1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Dla uzasadnienia modelu teoretycznego opracowano dane statystyczne stanu finansowego przedsiębiorstwa C (tab. 1).

Tabela 1. Przychody i koszty całkowite przedsiębiorstwa C

Lp.	P	K_c	Q
1	561	459	431,538462
2	678	569	521,538462
3	716	700	550,769231
4	628	590	483,076923
5	780	621	600
6	652	655	501,538462
7	575	579	442,307692
8	389	400	299,230769
9	493	490	379,230769
10	726	702	558,461538
11	565	560	434,615385
12	435	440	334,615385
13	483	420	371,538462
14	520	460	400
15	580	500	446,153846
16	720	620	553,846154
17	861	782	662,307692

Źródło: Opracowanie własne.

Z obliczeń wynika, że model ekonometryczny dla przychodów i kosztów przyjmie postać:

$$P = 1{,}3Q \tag{30}$$

$$\tilde{K}_C = 76{,}07128 + 1{,}0355Q \tag{31}$$

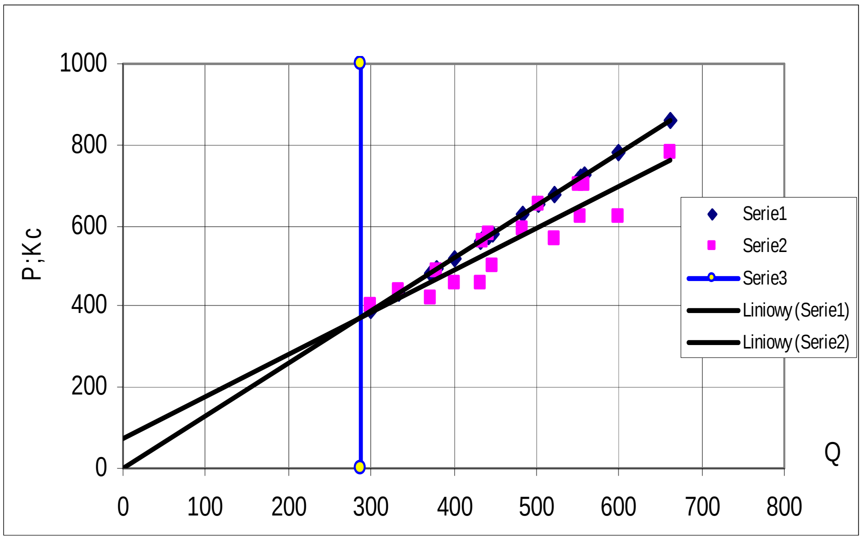
Modele ekonometryczne $\tilde{P} = f(Q)$ oraz $\tilde{K}_c = f(Q)$ jako linia regresji oraz linia pionowa, która wyznacza punkt równowagi między kosztami a przychodami, przedstawiono na rys. 2. Seria 1 odpowiada modelowi $\tilde{P} = f(Q)$, seria 2 – modelowi $\tilde{K}_c = f(Q)$, a seria trzecia – linii wyznaczającej próg rentowności. Z rysunku wynika, że hipoteza zerowa dla typu modelów $\tilde{P} = f(Q)$ oraz $\tilde{K}_c = f(Q)$ jest uzasadniona. Dla weryfikacji powstałych modeli ekonometrycznych wykorzystano wskaźnik determinacji oraz wskaźnik zbieżności: R^2 oraz φ^2. R^2 określa udział (stopień udziału) wariancji regresyjnej w wariancji całkowitej zmiennej zależnej oraz wyjaśnia jakość dopasowania modelu ekonometrycznego do danych empirycznych. Współczynnik zbieżności zaś wykazuje udział wariancji resztkowej w wariancji całkowitej zmiennej zależnej. Im mniejsza lub większa wartość φ^2, tym większa lub mniejsza jest zgodność. Istotność R^2 sprawdzamy za pomocą statystyki F :

$$F = \frac{R_{K_C}{}^2}{1 - R_{K_C}{}^2}(n-2) \tag{32}$$

gdzie: n – liczba zmiennych niezależnych

ze wskaźnikiem determinacji $R^2 = 0{,}8438$ i korelacji $r = 0{,}9186$.

Rys. 2. Funkcje regresji modeli $\tilde{P} = f(Q)$ oraz $\tilde{K}_c = f(Q)$ wraz z BEP



Źródło: Opracowanie własne.

Taka wielkość wskaźnika determinacji świadczy o bardzo wysokim związku K_C i Q oraz o tym, że wariancja strat na 91,86% wyznacza wariancje dochodów. Standardowy błąd oceny parametru strukturalnego $\bar{b}$ wyznaczamy ze wzoru:

$$S^2(b) = \frac{S^2_{y/\tilde{y}}}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \tag{33}$$

Ocena wariancji składnika losowego

$$S^2_{y/\tilde{y}} = \bar{D}_{y/\tilde{y}} = \frac{1}{n-2}\sum (y_i - \tilde{y})^2 \tag{34}$$

informuje, o ile zaobserwowane wartości zmiennej zależnej przeciętnie różnią się od teoretycznych wartości tej zmiennej. Błąd standardowy parametru a oraz wskaźnika korelacji obliczamy ze wzoru:

$$S_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}} \tag{35}$$

oraz:

$$S(a)^2 = \frac{1}{n} \frac{S_{y/\tilde{y}}^2 \cdot}{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i^2)}} \tag{36}$$

Tabela 2. Wariancje i średnie standardowe odchylenia parametrów

S_b^2	0,013229	S_a^2	45413,79
S_b^2	0,115016	S_a	213,1051
$(S_r)^2$	0,048012	S_r	0,219117

Źródło: Opracowanie własne.

Dla oceny istotności parametrów strukturalnych sprawdzianem hipotezy zerowej jest statystyka t (t – kryterium Studenta). Dla stopni swobody $k = n - m - 1 = 17 - 2 = 15$ oraz $\alpha = 0{,}05$, $t_{kr} = 2{,}131$. Wyniki istotności parametrów strukturalnych przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Istotność parametrów strukturalnych

ta	2,200176	>	2,131
tb	9,003143	>	2,131
tr	3,2905944	>	2,131

Źródło: Opracowanie własne.

Ponieważ $t > t_{kr}$ dla parametrów a, b oraz r, to hipotezę H_0 należy odrzucić na rzecz hipotezy alternatywnej oraz można stwierdzić, że zmienna objaśniająca oddziałuje w istotny sposób na zmienną objaśnianą.

Granice ufności dla a, b (tab. 4) wyznaczone zostały na podstawie wzoru:

$$a_{\max/\min} = \bar{a} \pm t_\alpha S_a \tag{37}$$

Tabela 4. Granice ufności parametrów strukturalnych

a,max	922,9958

a,min	14,74179
b,max	1,280607
b,min	0,790408

Źródło: Opracowanie własne.

Granice ufności relacji koszty–wolumen w aspekcie probabilistycznym *ex post* zostały wyznaczone z uwzględnieniem oceny wariancji relacji koszty–wolumen w następującej postaci:

$$S^2_{K_{C;i}} = S^2_{K_C/\tilde{K}_C}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(Q_i-\overline{Q}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2}\right\} \tag{38}$$

i w aspekcie probabilistycznym *ex ante* w postaci:

$$S^2_{K_{C;p}} = S^2_{K_C/\tilde{K}_C}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(Q_p-\overline{Q}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\overline{Q}\right)^2}\right\} \tag{39}$$

Dane doświadczalne w całości znajdują się powyżej progu rentowności z minimalnym marginesem bezpieczeństwa. Ważny jest wynik, polegający na tym, że ocena prawdopodobieństwa zdarzenia:

$$P\left\{K_{C,\min} < K_C < K_{C,\max}\right\} = 0{,}4 \tag{40}$$

wynosi 0,87, a dla zdarzenia:

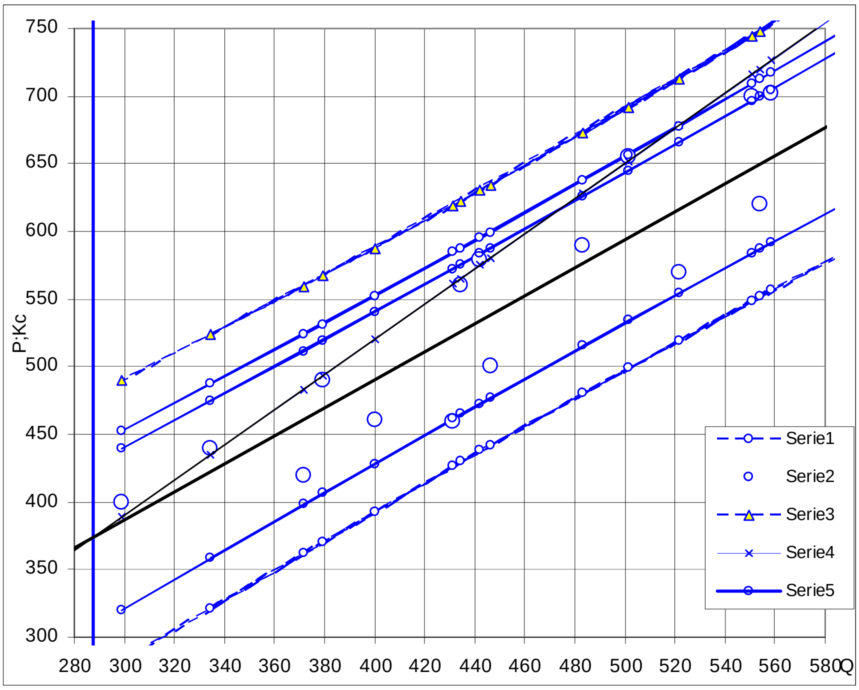
$$P\left\{K_{C,\min} < K_C < K_{C,\max}\right\} = 0{,}6 \tag{41}$$

wynosi 1. Próg rentowności przy prognozie *ex post* dla:

$$P\left\{K_{C,\min} < K_C < K_{C,\max}\right\} = 0{,}4 \tag{22}$$

mieści się w granicach od 287,6118 do 475.

Rys. 3. Funkcja kosztów całkowitych i przychodów z granicami ufności dla $P\left\{K_{C,\min} < K_C < K_{C,\max}\right\} = 0{,}9;0{,}6;0{,}4$.



Źródło: Opracowanie własne.

Analizując prawidłowości zmian progu rentowności oraz funkcje kosztów, należy wyznaczyć co najmniej trzy okresy monotonicznych zmian. Pierwszy okres obejmuje próby bieżące od 1 do 5. W tym okresie zaobserwowano największą stabilność PR oraz parametrów strukturalnych. Drugi okres obejmuje próby bieżące od 6 do 12. W tym okresie już powstała tendencja do obniżenia PR i kosztów stałych oraz do zwiększenia jednostkowych kosztów zmiennych. W trzecim okresie tendencje te wzmocniły się.

3. PODSUMOWANIE

Nowe podejście do progu rentowności pozwala wyznaczyć ogólne tendencje rozwojowe i czynniki decydujące o stanie ekonomicznym przedsiębiorstw, zbadać prawidłowości zmian tego stanu oraz opracować plany polityki strategicznej przedsiębiorstwa, zwiększenia jego konkurencyjności oraz zyskowności. Otrzymane wyniki badań wskazują, że opracowane modele mogą mieć szerokie zastosowanie przy ocenie i predykcji rozwoju ekonomiczno-finansowego przedsiębiorstw oraz przy kwantyfikacji ich ryzyka finansowego. Mogą się stać głównym argumentem przy określaniu taktycznych i strategicznych planów przedsiębiorstw.

LITERATURA

[1] Lewirok M., *Analiza ekonometryczna rozkładów prawdopodobieństwa w zagadnieniach ekonomicznych, finansowych i gospodarczych*, cz. I, UWM w Olsztynie, Olsztyn

2003
[2] Merło P., *Metody oceny efektywności przedsięwzięć inwestycyjnych i ich wykorzystanie w praktyce gospodarczej*, SGH, Warszawa 2005
[3] Merło P., Morozov L., *Безубыточность и планирование финансовой деятельности предприятия при многономенклатурном производстве*, Сборник научных трудов «Компьютерные и информационные технологии при моделировании, в управлении и экономике» 2007/2
[4] Morozov L., Merło P., Czajka P., *Analiza statystyczna danych doświadczalnych działalności przedsiębiorstw przy wykorzystaniu progu rentowności*, Сборник научных трудов «Компьютерные и информационные технологии при моделировании, в управлении и экономике» 2005/1

THE CONCEPT OF BREAK-EVEN POINT IN TERMS OF STOCHASTIC AND ITS USE IN BUSINESS PRACTICE

The paper presents the concept of break-even point in terms of stochastic. The main advantage of this concept is the possibility of its use in the manufacture of many products, eliminating the main shortcomings of the classical CVP method.