

Szczepan WOLIŃSKI
Politechnika Rzeszowska

WSPOMAGANA BADANIAMI ANALIZA KONSTRUKCJI ŻELBETOWYCH ZA POMOCĄ MODELI ST

Podstawowe zalety metody analizy i projektowania konstrukcji z betonu za pomocą modeli kratownicowych (modeli ST) to wizualizacja przebiegu sił wewnętrznych i możliwość analizy obszarów konstrukcji, w których rozkład odkształceń jest nieliniowy. Rozróżnia się trzy podstawowe rodzaje elementów modeli ST: ściskane pręty betonowe (pręty-S), rozciągane zbrojenie (pręty-T) i łączące je węzły. Wytrzymałość betonu na ściskanie w prętach-S i węzłach modeli ST, określona na podstawie zaleceń różnych norm i wyników badań doświadczalnych jest bardzo zróżnicowana. Na podstawie opublikowanych wyników badań doświadczalnych, założeń i wzorów normowych można określić uściślone wartości wytrzymałości na ściskanie betonu w prętach-S i węzłach konstrukcji. W pracy przedstawiono procedury statystycznego określenia parametrów i kalibracji wytrzymałości betonu umożliwiające redukcję niepewności w wynikach analizy konstrukcji za pomocą modeli ST. Rozważania te zilustrowano przykładami obliczeń numerycznych.

1. Wprowadzenie

Koncepcja projektowania konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli kratownicowych, nazywanych w normie PN-EN 1992-1-1:2008 [1] modelami ST, jest znana od końca XIX wieku [2]. W swej pierwotnej, intuicyjnej wersji była to metoda często stosowana do uproszczonych obliczeń skomplikowanych konstrukcji z betonu. Przykłady twórczego wykorzystania modeli ST do kształtowania i obliczania konstrukcji można znaleźć w pracach polskich projektantów już w latach 50-tych XX wieku [3]. Była to tzw. metoda „strumieni sił”. Pod koniec XX wieku podjęto intensywne badania nad teoretycznymi podstawami i doświadczalną weryfikacją zastosowań modeli ST w projektowaniu konstrukcji z betonu, które doprowadziły do uznania ich naukowego charakteru i wprowadzenia do norm projektowania. Wiąże się je głównie z badaniami zespołów B. Thürlimanna [4] i J. Schlaicha [5]. Analizę konstrukcji za pomocą modeli ST zalicza się do metod analizy plastycznej, opartych na podejściu statycznym teorii

nośności granicznej, czyli bezpiecznym oszacowaniu nośności konstrukcji „od dołu”.

Modele ST umożliwiają przejrzyste, zgodne z intuicją przedstawienie przebiegu sił wewnętrznych na podstawie obrazu trajektorii naprężeń w zarysowanych elementach i konstrukcjach żelbetowych. Pozwalają na ocenę naprężeń ściskających w betonie, racjonalne rozmieszczenie rozciąganego zbrojenia oraz ukształtowania i zbrojenia węzłów. Są powszechnie stosowane do analizy i projektowania obszarów konstrukcji, w których rozkład odkształceń jest nieliniowy, m. in. ścinanych i skręcanych odcinków belek, belek-ścian, krótkich wsporników belek i słupów itp.

Ogólnie, można rozróżnić kilka standardowych elementów modeli ST: ściskane krzyżulce betonowe (pręty-S), rozciągane zbrojenie (pręty -T) i różnego typu węzły łączące pręty ściskane i rozciągane. Projektant może przeanalizować i porównać różne dopuszczalne modele ST i wybrać model najlepiej spełniający konkretne wymagania. Możliwy jest również wybór modelu optymalnego, ale w praktyce jest to zadanie trudne i pracochłonne, a kryteria optymalizacji są zazwyczaj dyskusyjne i niejednoznaczne. W związku z tym wybór modelu ST z reguły zależy od indywidualnej decyzji projektanta.

Zasady projektowania i weryfikacji nośności, a niekiedy również użyteczności konstrukcji z betonu za pomocą modeli ST są skodyfikowane w normach i wytycznych, m. in. w Eurokodzie 2 [1], w normie amerykańskiej ACI 318 [6], normie kanadyjskiej CSA Standard A.23.3-94 [7] i wytycznych FIP [8]. Normowe modele ST można stosować do analizy i projektowania całych elementów i konstrukcji, ale najczęściej są używane do modelowania obszarów, w których rozkład odkształceń jest nieliniowy (tzw. „obszarów D”). Podstawowym i wciąż dyskusyjnym zagadnieniem związanym z obliczaniem nośności i wymiarowaniem obszarów D jest określenie obliczeniowej wytrzymałości na ściskanie betonu $\sigma_{Rd,max}$ w prętach-S i węzłach, w szczególności w obszarach, w których te pręty i węzły są poprzecznie rozciągane. Wyniki badań doświadczalnych różnych autorów oraz zalecenia różnych norm i wytycznych są w tym zakresie bardzo zróżnicowane. Określone doświadczalnie wartości $\sigma_{Rd,max}$ zależą od wielu czynników, m. in. od: klasy betonu, znaku i wielkości odkształceń i naprężeń prostopadłych do osi pręta-S, stopnia, rozmieszczenia i rodzaju zbrojenia. W niniejszej pracy przedstawiono zasady analizy konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli ST, ze szczególnym uwzględnieniem zaleceń dotyczących ściskanych prętów-S i węzłów oraz sposobów uściślenia wartości zalecanych parametrów modeli na podstawie wyników badań doświadczalnych. Rozważania zilustrowano przykładami obliczeń skorygowanych wartości wytrzymałości $\sigma_{Rd,max}$ betonu w ściskanych prętach i węzłach modeli ST.

2. Uwagi o analizie konstrukcji za pomocą modeli ST

Analiza konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli ST pozwala na ustalenie rozkładu sił wewnętrznych w całej konstrukcji, jej części lub w ograniczonych obszarach, w których założenie o liniowym rozkładzie odkształceń jest ewidentnie nieprawdziwe, jak między innymi: w pobliżu sił skupionych i podpór, w miejscach skokowej zmiany przekroju i przenikania się elementów, w strefach zakotwień. Modele ST umożliwiają analizę globalną całej konstrukcji, ich części i elementów oraz analizę lokalną wydzielonych obszarów konstrukcji. Analiza za pomocą modeli ST ma często charakter hierarchiczny, polegający na formułowaniu lokalnych modeli ST dla prętów ściskanych i węzłów modelu obejmującego całą konstrukcję, element lub jego fragment. Typową procedurę analizy konstrukcji rozważaną metodą można przedstawić następująco:

- a) określić geometrię, sposób obciążenia i podparcia konstrukcji,
- b) konstrukcję trójwymiarową podzielić na układy płaskie,
- c) obliczyć reakcje podporowe dla wydzielonych układów płaskich,
- d) wydzielić obszary „B”, w których można przyjąć liniowy rozkład odkształceń i obszary „D”, w których rozkład odkształceń jest zdecydowanie nieliniowy – granice tych obszarów można określić na podstawie zasady de Saint-Venanta,
- e) obliczyć siły wewnętrzne w obszarach „B” i w połączeniach obszarów „B” i „D” oraz sprawdzić warunki równowagi każdego z obszarów „D”,
- f) przyjąć standardowe lub indywidualne modele ST w obszarach „D” – w tym celu można wykorzystać trajektorie naprężeń obliczone metodą analizy liniowo-sprężystej lub intuicyjnie określone „przepływy strumieni sił”,
- g) pręty ściskane i/lub węzły modeli ST zlokalizowane w krytycznych miejscach obszarów „D” można potraktować jako podobszary „D”, dla których należy zdefiniować lokalne modele ST (zgodnie z punktami c÷g),
- h) globalne i lokalne modele ST obszarów i podobszarów „D” można optymalizować, stosując kryterium minimum energii potencjalnej.

Dodatkową zaletą analizy konstrukcji i elementów żelbetowych za pomocą modeli ST jest fakt, że określają one jednoznacznie strukturę niezawodnościową konstrukcji. Modele ST tworzą systemy złożone z losowo niezależnych lub/i skorelowanych elementów o szeregowej, równoległej lub mieszanej strukturze niezawodnościowej. Wybór konkretnego modelu ST umożliwia obliczenie miary niezawodności modelowanej konstrukcji [9].

3. Nośność ściskanych prętów i węzłów modeli ST

3.1. Pręty ściskane

Pręty ściskane (pręty-S) stanowią wydzielone umownie (niekiedy rzeczywiste) betonowe lub zbrojone elementy liniowe, w których dominuje ściskanie w kierunku osi elementu. W kierunku poprzecznym mogą występować naprężenia ściskające lub rozciągające. Wytrzymałość obliczeniowa $\sigma_{Rd,max}$ na ściskanie betonu w prętach-S zależy od wielu czynników, a jej wartości zalecane w normach i wytycznych oraz określone doświadczalnie są bardzo zróżnicowane.

Zalecenia Eurokodu 2 [1]

W obszarach, w których pręty-S nie są poprzecznie rozciągane (rys. 1a), wytrzymałość obliczeniową betonu na ściskanie w prętach-S $\sigma_{Rd,max}$ należy przyjmować równą wytrzymałości obliczeniowej betonu na ściskanie f_{cd} :

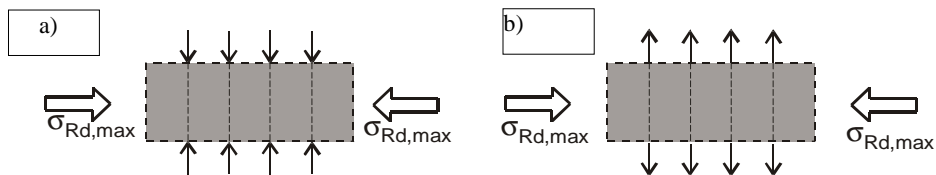
$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (1)$$

W zarysowanych strefach ściskanych (rys. 1b) wartość $\sigma_{Rd,max}$ należy obliczać ze wzoru:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6v'f_{cd} \quad (2)$$

$$v' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (3)$$

gdzie: f_{ck} – charakterystyczna wytrzymałość walcowa na ściskanie betonu po 28 dniach.



Rys. 1. Wytrzymałość obliczeniowa betonu w prętach-S: a) które nie są poprzecznie rozciągane, b) które są poprzecznie rozciągane

Wartości $\sigma_{Rd,max}$ w obliczeniach maksymalnej poprzecznej siły granicznej V_{Rd} przy ścinaniu zaleca się przyjmować w zależności od okoliczności, według podanych niżej wzorów:

- w elementach żelbetowych o wysokości użytecznej przekroju d niewymagających obliczania zbrojenia na ścinanie:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,035k^{\frac{2}{3}}f_{ck}^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1 = \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \quad (4)$$

- w elementach żelbetowych wymagających obliczania zbrojenia na ścinanie:

$$\sigma_{Rd,max} = \begin{cases} v_1 = 0,6f_{ck} & \text{dla } f_{ck} \leq 60\text{MPa} \\ v_1 = 0,9 - \frac{f_{ck}}{200} \geq 0,5 & \text{dla } f_{ck} \geq 60\text{MPa} \end{cases} \quad (5)$$

W projekcie Eurokodu 2 z roku 2003 wartości $\sigma_{Rd,max}$ były dodatkowo zależne od stopnia zbrojenia poprzecznego do osi pręta i kąta między osiami pręta i zbrojenia poprzecznego.

Zalecenia FIP [8]

Według zaleceń Komisji 3 FIP [8] wytrzymałość obliczeniowa $\sigma_{Rd,max}$ na ściskanie betonu w prętach-S powinna być obliczana według wzoru:

$$\sigma_{Rd,max} = \alpha \beta f_{cd} \quad (6)$$

gdzie: $\alpha = 0,85$,

$\beta = 1,0$ – dla obszarów niezarysowanych, w których rozkład odkształceń jest równomierny,

$\beta = 0,80$ – dla obszarów zarysowanych, w których kierunek przebiegu rys jest równoległy do osi pręta-S,

$\beta = 0,60$ – w obszarach, w których występują rysy prostopadłe do osi pręta-S,

$\beta = 0,45$ – w obszarach, w których występują rysy prostopadłe do osi pręta-S o dużych szerokościach rozwarcia.

Dodatkowo powinien być spełniony warunek: $0,382 \leq \alpha\beta \leq 0,85$.

Zalecenia CSA Standard A.23.3-94 [7]

Według zaleceń normy kanadyjskiej CSA Standard A.23.3-94 [7], wytrzymałość obliczeniowa $\sigma_{Rd,max}$ na ściskanie betonu w prętach-S powinna być obliczana według wzoru:

$$\sigma_{Rd,max} = \beta f_{cd} = \frac{f_{cd}}{0,80 + 170\varepsilon_1} \leq 0,85f_{cd}, \quad \varepsilon_1 = (\varepsilon_s + 0,002) \cot^2 \theta_s + \varepsilon_s \quad (7)$$

gdzie: $0,576 \leq \beta \leq 0,85$,

ε_s – odkształcenie zbrojenia poprzecznego przecinającego oś pręta-S pod kątem θ_s .

Zalecenia ACI 318-02 [6]

Według zaleceń normy Amerykańskiego Instytutu Betonu ACI 318-02 [6], wytrzymałość obliczeniowa $\sigma_{Rd,max}$ na ściskanie betonu w prętach-S powinna być obliczana według wzoru:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,85\beta_s f_{cd}, \quad 0,336f_{cd} \leq \sigma_{Rd,max} \leq 0,85f_{cd} \quad (8)$$

gdzie: β_s dla prętów-S, które są: równoległe do podłużnej osi elementu – $\beta_s = 1,0$, wydzielone w obszarach lub elementach rozciąganych konstrukcji – $\beta_s = 0,40$, łączą ściskane węzły w obszarach bez zbrojenia poprzecznego do osi pręta-S – $\beta_s = 0,60$, łączą ściskane węzły w obszarach o minimalnym zbrojeniu poprzecznym do osi pręta-S – $\beta_s = 0,75$.

Zbrojenie minimalne należy obliczyć z wzoru:

$$\sum (A_{si} / bs_i) \sin \gamma_i \geq 0,003,$$

gdzie: A_{si} – całkowite zbrojenie w jednej warstwie,

s_i – odległość między warstwami zbrojenia przecinającego oś pręta-S pod kątem $\gamma_i \geq 40^\circ$.

Zalecenia sformułowane na podstawie wybranych wyników badań doświadczalnych

G. Kani [10] określił empirycznie dolny kres wartości wytrzymałości obliczeniowej $\sigma_{Rd,max}$ na ściskanie betonu w prętach-S jako $\sigma_{Rd,max} \cong 0,60f_{cd}$.

W podsumowaniu wyników własnych badań doświadczalnych J. Kolleger i G. Melhorn [11] stwierdzili, że rozmieszczenie i właściwości zbrojenia nie mają istotnego wpływu na wartość $\sigma_{Rd,max}$ w pręcie-S, która zależy jedynie od naprężeń prostopadłych do jego osi. Dolny kres wartości $\sigma_{Rd,max}$ w przypadku poprzecznego rozciągania prętów-S określili jako $\min \sigma_{Rd,max} \cong 0,80f_{cd}$.

Analiza obszernego zbioru wyników badań doświadczalnych przeprowadzona przez P. H. Feenestra i R. De Borsta [12] pozwoliła na stwierdzenie bardzo słabej korelacji między wytrzymałością obliczeniową na ściskanie betonu w prętach-S a poprzecznymi naprężeniami i odkształceniami w obszarach, w których je wydzielono. Według wyników uzyskanych przez tych autorów, wartość $\sigma_{Rd,max}$ w żelbetowych prętach-S poddanych poprzecznemu rozciąganiu w kierunku prostopadłym do osi wynosi $\min \sigma_{Rd,max} \cong 0,80f_{cd}$, i jest praktycznie niezależna od innych czynników.

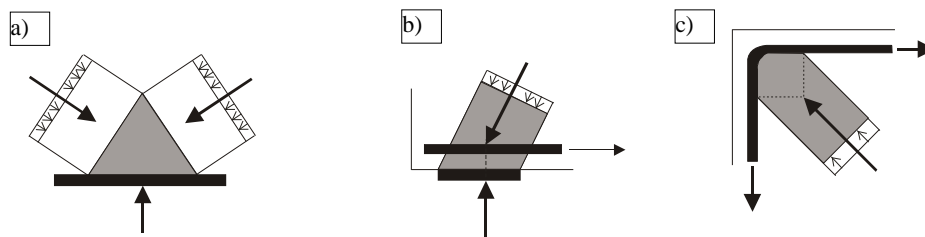
Na podstawie przedstawionych wytycznych i wyników badań doświadczalnych zalecane wartości wytrzymałości obliczeniowej betonu na ściskanie w prętach-S mieszczą się według odpowiednich źródeł w granicach:

- Eurokod 2 [1]: $0,50f_{cd} \leq \sigma_{Rd,max} \leq f_{cd}$,
- FIP Commission 3 [8]: $0,382f_{cd} \leq \sigma_{Rd,max} \leq 0,85f_{cd}$,
- Canadian Standard [7]: $0,576f_{cd} \leq \sigma_{Rd,max} \leq 0,85f_{cd}$,
- ACI 318-02 Code [6]: $0,336f_{cd} \leq \sigma_{Rd,max} \leq 0,85f_{cd}$,
- G. Kani [10]: $\sigma_{Rd,max} \geq 0,60f_{cd}$,
- J. Kolleger, G. Melhorn [11]: $\sigma_{Rd,max} \geq 0,80f_{cd}$,
- P. Feenestra, R. De Borst [12]: $\sigma_{Rd,max} \cong 0,80f_{cd}$.

3.2. Węzły

Węzły modeli ST definiuje się jako obszary, w których zbiegają się pręty ściskane i rozciągane lub przyłożone są obciążenia skupione bądź reakcje, występują podpory, strefy zakotwień, zagięcia prętów zbrojenia, połączenia i naroża elementów itp. Ogólnie, rozróżnia się trzy podstawowe typy węzłów: ściskane bez rozciągania „C” (rys. 2a), ściskane z rozciąganiem w jednym kierunku „C-T” (rys. 2b) i ściskane z rozciąganiem w dwóch kierunkach „C-T-T” (rys. 2c).

Zalecane w normach i wytycznych powołanych w p. 3.1 wartości wytrzymałości obliczeniowej betonu na ściskanie $\sigma_{Rd,max}$ dla podstawowych typów węzłów należy obliczać według wzorów zestawionych w tab. 1.



Rys. 2. Podstawowe typy węzłów: a) ściskanie bez rozciągania „C”, b) ściskanie z rozciąganiem w jednym kierunku „C-T”, c) ściskanie z rozciąganiem w dwóch kierunkach „C-T-T”

Tabela 1. Wartości $\sigma_{Rd,max}$ dla podstawowych typów węzłów

Norma, wytyczne	$\sigma_{Rd,max}$ dla węzła typu		
	C	C-T	C-T-T
Eurokod 2 [1]	$(1 - \frac{f_{cd}}{250})f_{cd}$	$0,85 (1 - \frac{f_{cd}}{250})f_{cd}$	$0,75 (1 - \frac{f_{cd}}{250})f_{cd}$
FIP [8]	$0,85 f_{cd}$	$0,72 f_{cd}$	$0,72 f_{cd}$
CSA Standard [7]	$0,85 f_{cd}$	$0,75 f_{cd}$	$0,60 f_{cd}$
ACI Code [6]	$0,85 f_{cd}$	$0,68 f_{cd}$	$0,51 f_{cd}$

Uwaga: f_{cd} w MPa.

4. Statystyczne określenie i kalibracja modelu nośności

4.1. Określenie parametrów modelu na podstawie wstępnej informacji i wyników badań

Jeżeli posiadane informacje na temat adekwatności przyjętego modelu nośności lub wytrzymałości i oszacowanie maksymalnej wartości współczynnika zmienności v_r badanej charakterystyki modelu są dobrze udokumentowane i wiarygodne, wartość charakterystyczną nośności r_k można obliczyć według następujących wzorów [13]:

- jeśli znany jest jeden dodatkowy wynik badania nośności r_e :

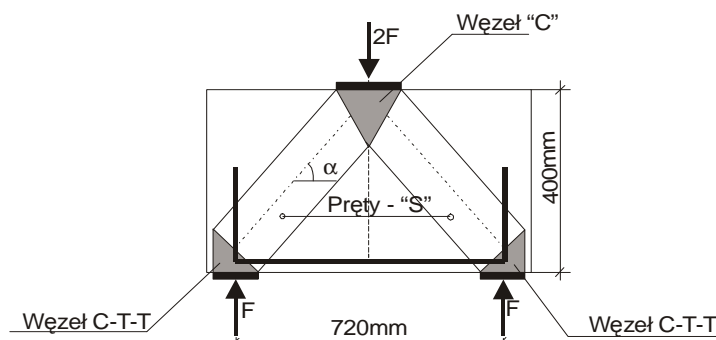
$$r_k = \eta_k r_e, \quad \eta_k = 0,9 \exp(-2,31v_r - 0,5v_r^2) \quad (9)$$

- jeśli znane są dwa lub trzy dodatkowe wyniki badań r_{ei} :

$$r_k = \eta_k r_{em}, \quad \eta_k = \exp(-2,0v_r - 0,5v_r^2) \quad (10)$$

gdzie: r_{em} – wartość średnia dodatkowych wyników badań, która powinna spełniać nierówność $|r_{ei} - r_{em}| \leq 0,10r_{em}$.

Na rysunku 3. przedstawiono żelbetową belkę-ściągę, która była przedmiotem badań doświadczalnych N. Lehwaltera [14]. Badania dotyczyły nośności ściskanych prętów-S w modelach ST żelbetowych belek-ściąg. Pierwsza seria badanych elementów nie posiadała zbrojenia na ścinanie, a jedynie bardzo silne zbrojenie rozciągane w dolnej części. Wszystkie belki tej serii uległy zniszczeniu wskutek zmiażdżenia betonu ściskanego bez uplastycznienia zbrojenia.



Rys. 3. Belka-ściana 023 Lehwalter [14]. Elementy modelu ST

Określona doświadczalnie nośność rozważanej belki 023 Lehwaltera wynosi $2F = 691$ kN. Wartość średnia wytrzymałości na ściskanie betonu użytego do wykonania elementu wynosi $f_{cm} = 20$ MPa, a wartość charakterystyczna (walcowa) $f_{ck} = 15,1$ MPa. Współczynnik zmienności nośności prętów-S przyjętego modelu ST (rys. 3.), określony na podstawie uprzednio wykonanych badań, wynosi $v_r \approx 0,25$. Dla rozważanej belki-ściany doświadczalnie określona wytrzymałość na ściskanie betonu w prętach-S wynosi $r_e = \sigma_{R,max} = 15,39$ MPa.

Wartość charakterystyczna wytrzymałości betonu na ściskanie w prętach-S do projektowania belek-ściąg rozważanego rodzaju, obliczona według wzoru (9) wynosi:

$$\sigma_{Rk,max} = r_k = 0,9 \exp(-2,31 \times 0,25 - 0,5 \times 0,25^2) \times 15,39 = 7,53 \text{ MPa},$$

a wytrzymałość obliczeniowa, przy założeniu wartości częściowego współczynnika bezpieczeństwa dla betonu $\gamma_c = 1,5$, wynosi:

$$\sigma_{Rd,max} = 7,53 : 1,5 = 5,02 \text{ MPa}.$$

Według zaleceń odpowiednich norm i wytycznych wartości $\sigma_{Rd,max}$ są równe: 6,07 MPa wg Eurokodu 2 [1], 5,50 MPa wg FIP [8], 6,21 MPa wg CSA Standard [7] i 6,87 MPa wg ACI Code [6].

Dla trzech wyników badań belek-ścian z tej samej serii uzyskano średnią wytrzymałość na ściskanie w prętach-S równą $r_{em} = \bar{\sigma}_{R,max} = 15,09$ MPa. Zgodnie ze wzorem (10) charakterystyczna wytrzymałość betonu na ściskanie w prętach-S wynosi:

$$\sigma_{Rk,max} = [\exp(-2,0 \times 0,25 - 0,5 \times 0,25^2)] \times 15,09 = 8,20 \text{ MPa},$$

a wytrzymałość obliczeniowa jest równa:

$$\sigma_{Rd,max} = 8,20 : 1,4 = 5,86 \text{ MPa}.$$

Określenie wartości $\sigma_{Rd,max}$ na podstawie pojedynczych lub nielicznych wyników badań doświadczalnych, bez założenia postaci modelu analitycznego, prowadzi do jej zaniżenia o około 20% (dla 1 wyniku badań) i około 4% (dla 3 wyników badań), w stosunku do wartości zalecanej w Eurokodzie 2 [1]. Jednak uzyskane w taki sposób wartości $\sigma_{Rd,max}$ są znacznie bardziej wiarygodne niż wartości nominalne zalecane w normie [1].

4.2. Statystyczna kalibracja modelu nośności

W normie PN-EN 1990: 2002 [13] sformułowano zalecenia dotyczące zasad wykorzystania dodatkowych informacji i określenia parametrów modeli nośności konstrukcji na podstawie wyników badań doświadczalnych. W celu sformułowania podanych w normie wzorów wykorzystano procedury Bayesa i konwencjonalne metody statystyczne. Przyjęto przy tym założenie (znajdujące potwierdzenie w praktyce), że procedury Bayesa prowadzą, w przypadku niedokładnie określonych rozkładów parametrów wyjściowych, do wyników bardzo zbliżonych do uzyskiwanych metodami statystycznymi dla przedziału ufności, w którym wyniki mieszczą się z prawdopodobieństwem 0,75 [1, 6, 8, 12].

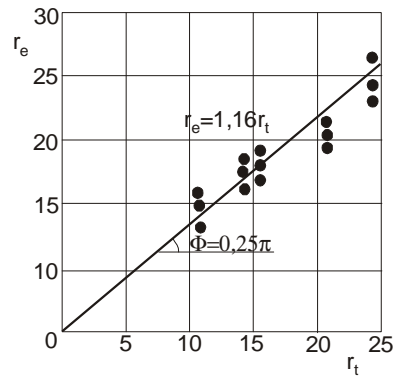
Standardową metodę statystycznej kalibracji modeli nośności wskazaną w PN-EN 1990:2002 [13] można przedstawić na przykładzie kalibracji modelu wytrzymałości betonu $\sigma_{Rd,max}$ w prętach-S belki-ściany przedstawionej na rys. 3., w następujących punktach:

1) Zdefiniować poszukiwaną wytrzymałość betonu jako funkcję statystycznie niezależnych zmiennych losowych \underline{X} , o normalnym lub logarytmicznie normalnym rozkładzie (wzory (2) i (3)):

$$r_t = g_{rt}(\underline{X}) \Rightarrow r_t \equiv \sigma_{Rd,max} = 0,6(1 - \frac{f_{ck}}{250})f_c \quad (11)$$

2) Wyznaczyć doświadczalne r_{ei} i teoretyczne r_{ti} wartości funkcji g_r . Zaznaczyć punkty (r_{ti}, r_{ei}) w układzie współrzędnych $r_t \div r_e$. Aproxymować zależność (r_{ti}, r_{ei}) funkcją liniową o równaniu $r_e = br_t$. Na rysunku 4. zaznaczono 15 punktów o współrzędnych $(r_{ti} \div r_{ei}) \equiv (\sigma_{t,Ri,max} \div \sigma_{e,Ri,max})$, reprezentujących wyniki badań doświadczalnych 15 belek-ścian przedstawionych na rys. 3. [14] i wytrzymałości obliczonych ze wzoru (11).

Punkty (r_{ti}, r_{ei}) układają się dość dobrze na linii prostej nachylonej pod kątem $\theta = \pi/4$, co oznacza, że przyjęta według Eurokodu 2 [1] (wzór (11)) postać funkcji r_t jest poprawna. Współczynnik kierunkowy obliczony metodą najmniejszych kwadratów wynosi w rozważanym przypadku $b = 1,16$.



Rys. 4. Zależność $r_t \div r_e$ dla wytrzymałości obliczeniowej na ściskanie betonu prętów-S analizowanej belki-ściany

3. Oszacować współczynnik zmienności błędów v_δ dla rozrzutu wartości $\delta_i = r_{ei} / br_{ti}$. W tym celu należy obliczyć wartości $\Delta_i = \ln(\delta_i)$ oraz wartość średnią $\bar{\Delta}$, wariancję s_Δ^2 ze wzorów:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad s_\Delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2 \quad (12)$$

Wyrażenie (13) można potraktować jako współczynnik zmienności błędów:

$$v_\delta = \sqrt{\exp(s_\Delta^2) - 1} \quad (13)$$

Obliczone według wzorów (12) i (13) parametry wynoszą: $\bar{\Delta} = -0,1193$, $s_{\Delta}^2 = 0,003411$ i $v_{\delta} = 0,0584 = 5,84\%$, $f_{cm} \cong 20,0$ MPa.

4. Ponieważ współczynnik zmienności błędów jest mały, wytrzymałość obliczeniową $r_k \equiv \sigma_{Rd,max}$ betonu w prętach-S, dla małej liczby wyników badań przy założeniu kwantyli obliczeniowych dla stanów granicznych nośności równych: $k_{d,\infty} = 3,04$ i $k_{d,n} = 4,075$ (co odpowiada prawdopodobieństwu 0,001 zaobserwowania wartości mniejszej niż r_d) [13], można obliczyć z zależności:

$$r_d = bg_{rt}(\underline{X}_m) \exp(-k_{d,\infty} \alpha_{rt} Q_{rt} - k_{d,n} \alpha_{\delta} Q_{\delta} - 0,5Q^2) \quad (14)$$

gdzie: $Q_{rt} = \sigma_{\ln(rt)} = \sqrt{\ln(v_{rt}^2 + 1)}$,

$$Q_{\delta} = \sigma_{\ln(\delta)} = \sqrt{\ln(v_{\delta}^2 + 1)},$$

$$Q = \sigma_{\ln(r)} = \sqrt{\ln(v_r^2 + 1)},$$

$$\alpha_{rt} = Q_{rt} / Q,$$

$$\alpha_{\delta} = Q_{\delta} / Q,$$

$$v_{\delta} = \sqrt{\exp(s_{\Delta}^2) - 1}.$$

Współczynniki zmienności v_r i v_{rt} można obliczyć ze wzorów:

$$v_r^2 = (v_{\delta}^2 + 1) \left[\prod_{i=1}^j (v_{Xi}^2 + 1) \right] - 1, \quad v_{rt}^2 \cong \frac{1}{g_{rt}^2(\underline{X}_m)} \sum_{i=1}^j \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial X_i} \sigma_i \right)^2 \quad (15)$$

Po wykonaniu obliczeń uzyskano następujące wyniki:

$$v_r^2 = 0,00679, \quad v_r = 0,0824 = 8,24\%,$$

$$v_{rt}^2 = 0,00669, \quad v_{rt} = 0,0818 = 8,18\%,$$

$$Q_{rt} = 0,08166, \quad Q_{\delta} = 0,05840, \quad Q = 0,08226,$$

$$\alpha_{rt} = 0,9927, \quad \alpha_{\delta} = 0,7010,$$

$$r_d = \sigma_{Rd,max} = 8,64 \text{ MPa} > 6,07 \text{ MPa (wg Eurokodu 2)}.$$

Wyniki statystycznej kalibracji wzoru na obliczanie wartości $\sigma_{Rd,max}$ zalecanego w Eurokodzie 2 [1], na podstawie 15 wyników badań doświadczalnych rozważanych belek-ścian, pozwoliły na zwiększenie jej wartości o około 30%, w porównaniu z zalecaną w normie, oraz na określenie prawdopodobieństwa jej zaniżenia (0,001) i poziomu ufności oceny (około 0,75). Należy podkreślić, że

dla wartości $\sigma_{Rd,max}$ określonej na podstawie zaleceń normowych prawdopodobieństwo zaniżenia i poziom ufności nie są znane nawet w przybliżeniu.

5. Wnioski

Większość współczesnych norm projektowania konstrukcji z betonu zawiera zalecenia dotyczące analizy i projektowania za pomocą modeli ST. Podstawowym zagadnieniem decydującym o wiarygodności wyników analiz konstrukcji żelbetowych, uzyskanych z wykorzystaniem modeli ST jest określenie obliczeniowych wartości wytrzymałości betonu na ściskanie $\sigma_{Rd,max}$ w prętach i węzłach tych modeli. Odpowiednie wzory normowe prowadzą do wartości $\sigma_{Rd,max}$ znacznie różniących się między sobą i różnych od wyników badań doświadczalnych. Co więcej, brak jest nawet przybliżonych informacji na temat poziomu niepewności charakteryzującej zalecane wartości $\sigma_{Rd,max}$. Utrudnia to stosowanie modeli ST do probabilistycznego projektowania i analizy konstrukcji.

W przypadku pojedynczych lub bardzo nielicznych wyników badań doświadczalnych, jeśli dysponuje się wiarygodnymi informacjami na temat zmienności badanej charakterystyki i jej sprawdzonym praktycznie modelem analitycznym (np. w postaci wzoru normowego), traktowanymi jako dodatkowe informacje wstępne, parametry modelu można określić za pomocą procedury uproszczonej. Polega ona na wykorzystaniu współczynnika redukcji o ustalonej z góry postaci. Stosując ten sposób, nie można jednak określić ilościowo poziomu ufności uzyskanej oceny.

Dysponując zbiorem wyników o większej liczebności (co najmniej kilkunastoelementowym), ocenę badanej charakterystyki można określić za pomocą statystycznej kalibracji znanego modelu (np. normowego). Sposób ten umożliwia określenie poziomu ufności oceny, która wynosi około 0,75 i prawdopodobieństwa zaniżenia uzyskanej oceny. Znajomość tych parametrów statystycznych pozwala z kolei na oszacowanie miary niezawodności konstrukcji analizowanej za pomocą modeli ST.

Literatura

- [1] PN-EN 1992-1-1:2008. *Eurokod 2, Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*. PKN, Warszawa, wrzesień 2008.
- [2] Ritter W.: *Die Bauweise Hennebique*. Schweizerische Bauzeitung. Vol. 33, no. 7, Feb. 1899, Zurich, s. 60.
- [3] Zalewski W.: *Projektowanie żelbetowych konstrukcji przestrzennych. Cz. I, II, III*. BISTYP, Warszawa 1955 (opracował J. Szymczak).

- [4] Thürlimann B.: *Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton*. Institut für Bau-
statik und Konstruktion. ETH, Zürich 1988.
- [5] Schlaich J., Schäfer K.: *The Design of Structural Concrete*. FIP Congress, Amster-
dam 1998.
- [6] ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete*. ACI
318-02, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2002.
- [7] CSA Standard A.23.3-94. *Design of Concrete Structures*. Canadian Standards As-
sociation. Rexdale, Ontario, Canada, 1994.
- [8] FIP Commission 3, FIB Recommendation. *Practical Design of Structural Con-
crete*. FIB Congress, Amsterdam 1998.
- [9] Woliński Sz.: *Probabilistic Design of Concrete Structures Using Strut and Tie
Method*. Proceedings of the 2nd fib Congress, June 5-8 2006 – Naples, Italy. Con-
densed Papers (1), pp. 258-259 (full version on CD, pp. 1-12).
- [10] Kani G.: *Basic Factors Concerning Shear Failure*. ACI Journal, vol. 61, no.
6/1966.
- [11] Kolleger J., Mehlhorn G.: *Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der
Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons bei einer Querkzugbeanspruchung*.
Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 41/1990.
- [12] Feenstra P.H., De Borst R.: *Aspects of robust computational modeling for plane
and reinforced concrete*. Heron, Delft University of Technology & TNO Institute,
Delft, The Netherlands, vol. 38, no. 4/1993.
- [13] PN-EN 1990:2002. *Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji*. PKN, Warsza-
wa, październik 2004.
- [14] Lehwalter N.: *Die Tragfähigkeit von Betondruckstreben in Fachwerkmodellen am
Beispiel von Gedrungenen Balken*. Dissertation, Technischen Hochschule
Darmstadt, Germany, 1988.

ASSISTED BY TESTING ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES BY MEANS OF THE ST MODELS

S u m m a r y

Advantages of the strut and tie models are that we can visualize the flow of stresses in rein-
forced concrete structures and members and that they can be used in regions with nonlinear strain
distributions. There are three main elements of ST-models: the compression struts, the tension ties
and the nodal zones. The permissible compression stress that can be carried by concrete in struts
and nodes recommended by different codes and experimental results given by various authors are
inconsistent and controversial. Based on the test results and on assumptions and formulas given by
different codes and authors, compressive strength of concrete in struts and nodes regions of
a structure can be calibrated. The statistical determination procedures of resistance models is dis-
cussed and used to reduce uncertainties in the compressive strength of concrete in struts and nodes
of ST models. These procedures are explain by an examples of numerical calculations.

Złożono w Oficynie Wydawniczej w czerwcu 2009 r.